



**T.C.
RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BİR COVID-19 YAYILIMI MODELİNİN STOKASTİK
DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ayhan ÖNEN

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI**

**RİZE
2023**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI danışmanlığında, Ayhan ÖNEN tarafından hazırlanan bu *Bir COVID-19 Yayılımı Modelinin Stokastik Davranışlarının İncelenmesi* adlı bu tez çalışması, 22/08/2023 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/~~oy çokluğuyla~~ başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı Soyadı	İmza
Başkan	: Dr. Öğr. Üyesi Övgü GÜREL YILMAZ	
Üye	: Prof. Dr. Tülay KESEMEN	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI	

ETİK BEYAN

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Bir COVID-19 Yayılımı Modelinin Stokastik Davranışlarının İncelenmesi” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılabilecek bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

22/08/2023

(İmza)

Ayhan ÖNEN

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, COVID-19 pandemisinin yayılımı stokastik gürültü içeren bir diferansiyel denklem sistemi kullanılarak incelenmiştir. Oluşan stokastik diferansiyel denklem sistemi pandeminin yayılımının stokastik davranışlarının incelenmesine imkân sağlamaktadır.

Çalışmamın hayata geçirilmesi sürecinde bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, araştırmanın her aşamasında fikirleriyle beni yönlendiren, samimiyetini her zaman hissettiren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI'ya, lisansüstü ders aşamasında yardımlarını esirgemeyen Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki sayın hocalarıma, yüksek lisans eğitimim sürecinde TÜBİTAK 2210/A Yurt İçi Lisans Burs Programının desteğine, son olarak çalışmamda bana güvenlerini hiçbir zaman eksik etmeyen, arkadaşlarıma ve aileme teşekkür ederim.

Ayhan ÖNEN

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	V
ABSTRACT.....	VI
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	VII
TABLolar LİSTESİ.....	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ	X
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	3
1.1. Klasik Kompartımanlı Modeller	3
1.2. Rastgele Modelleme.....	5
1.3. Olasılık Teorisi İle İlgili Temel Kavramlar	7
1.4. Stokastik Süreçlerle İle İlgili Temel Kavramlar	22
1.4.1. Bazı Özel Stokastik Süreçler	28
1.5. Stokastik Diferansiyel Denklemler	32
1.6. Stokastik Diferansiyel Denklemler için Sayısal Yöntemler.....	34
1.7. Literatür Özeti	36
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	41
2.1. COVID-19 Hastalığı	41
2.2. Deterministik Model	43
2.3. Stokastik Model	46
3. BULGULAR.....	47
3.1. Deterministik Sonuçlar.....	47
3.2. Stokastik Sonuçlar (Euler-Maruyama).....	48
3.3. Stokastik Sonuçlar (Milstein).....	52
3.4. Sonuçların Karşılaştırılması ve Yorumlanması	55
4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	67
5. ÖNERİLER.....	70
KAYNAKLAR	71

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ana Bilim Dalı : Matematik

Tez Türü : Yüksek Lisans

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI

Hazırlayan : Ayhan ÖNEN

Yıl : 2023

Sayfa Sayısı : 74

ÖZET

BİR COVID-19 YAYILIMI MODELİNİN STOKASTİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Bu tez çalışmasında literatürde var olan bir deterministik diferansiyel denklem sistemi kullanılarak COVID-19 hastalığının yayılımının stokastik davranışları incelenmektedir. Ahmed vd. tarafından yayımlanan modele stokastik gürültü eklenmesiyle oluşturulan stokastik sistemin analizi ile hastalığın yayılımındaki rastgelelik ele alınmaktadır. Kaynak model karantinadaki ve hastalığa maruz kalmış bireylerin yanı sıra belirti gösteren ve göstermeyen bireylerin temsil edildiği altı kompartımandan oluşan yapıyla literatürdeki diğer COVID-19 yayılımı modellerinden ayrılmaktadır. Bu modelin stokastik analizi ile hastalığın toplumdaki ilerleyişinin farklı bir şekilde incelenmesi amaçlanmaktadır. Oluşturulan stokastik diferansiyel denklem sistemi literatürde yaygın olarak kullanılan Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleri ile ayrı ayrı sayısal olarak incelenmektedir. Kompartımanlar için elde edilen sayısal çözümler aracılığıyla ortalama stokastik çözümlere ulaşarak bu çözümlerin deterministik modelin çözümleri ile karşılaştırılması sonucunda hastalıkla ilgili rastgele yapı analiz edilmektedir. Deterministik model için kaynak çalışmada verilen üreme katsayısı bilgisi, ortalama stokastik sayısal çözümler, farklı stokastik yöntemlerle elde edilen uç değerler ve çözüm grafikleri gibi farklı göstergelerin incelenmesi ile hastalık yayılımının stokastik yapısı ele alınmaktadır. Ek olarak stokastik simülasyonda kullanılan yöntem, tekrar sayısı ve difüzyon katsayılarının değiştirilmesi sonucunda elde edilen çözümler ele alınmaktadır. Oluşturulan stokastik modelin incelenmesi aşamasında bu bileşenlerde yaşanan değişimlerin birbirleri ve deterministik çözüm ile karşılaştırılması sonucunda stokastik sistemin detaylı bir analizi hedeflenmektedir.

Anahtar Kelimeler: COVID-19, Matematiksel Modelleme, Stokastik Gürültü, Stokastik Diferansiyel Denklem, Simülasyon

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Mathematics

Thesis Type : Master's Thesis

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Zafer BEKİRYAZICI

Author : Ayhan ÖNEN

Year : 2023

Pages : 74

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE STOCHASTIC BEHAVIOUR OF A COVID-19 TRANSMISSION MODEL

In this study, the stochastic behavior of the spread of COVID-19 disease is examined by using a deterministic differential equation system available in the literature. Using the analysis of the stochastic system obtained by adding stochastic noise to the model published by Ahmed et al., the randomness in the spread of the disease is discussed. The source model differs from other COVID-19 transmission models in the literature with its six-compartment structure, in which quarantined and exposed individuals, as well as symptomatic and asymptomatic individuals are represented. With the stochastic analysis of this model, it is aimed to examine the progression of the disease in the population in a different way. The obtained stochastic differential equation system is numerically analyzed by both Euler-Maruyama and Milstein methods, which are widely used in literature. By means of numerical solutions obtained for the compartments, the average stochastic solutions are found, and these solutions are compared with the solutions of the deterministic model, and the random structure related to the disease is analyzed. For the deterministic model, the stochastic structure of disease spread is discussed by examining different indicators such as the information from the basic reproduction number given in the source study, average stochastic numerical solutions, extreme values obtained by different stochastic methods, and solution graphs. In addition, the solutions obtained from changing the method used in stochastic simulation, the number of repetitions and the values of the diffusion coefficients are discussed. During the examination of the obtained stochastic model, a detailed analysis of the stochastic system is aimed through the comparison of the changes in these components with each other and with the deterministic solution.

Keywords: COVID-19, Mathematical Modeling, Stochastic Noise, Stochastic Differential Equation, Simulation.

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$E(X)$	:	X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E(X^n)$	:	X rastgele değişkeninin n . momenti
$Var(X)$	:	X rastgele değişkeninin varyansı
$std(X)$	:	X rastgele değişkeninin standart sapması
$cov(X)$	:	X rastgele değişkeninin kovaryansı
$M_X(t)$	:	X değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu
$cov(X, Y)$	:	X ve Y rastgele değişkenlerinin kovaryansı
$P(A)$	:	A olayının olasılığı
$P(A/B)$	:	A olayının koşullu olasılığı (B koşulu ile)
Ω	:	Örnek uzay
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$Skew(X)$	:	X rastgele değişkeninin çarpıklık katsayısı
$Kurt(X)$	:	X rastgele değişkeninin basıklık katsayısı

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. Parametrelerin açıklamaları ve sayısal değerleri	44
Tablo 2. Kompartımanların deterministik, Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleriyle elde edilen uç değerleri.....	55
Tablo 3. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için S kompartımanına ait sonuçlar	57
Tablo 4. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için Q kompartımanına ait sonuçlar	57
Tablo 5. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için I_S kompartımanına ait sonuçlar	57
Tablo 6. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için R kompartımanına ait sonuçlar	57
Tablo 7. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için S kompartımanına ait sonuçlar ..	59
Tablo 8. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için Q kompartımanına ait sonuçlar .	59
Tablo 9. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için I_S kompartımanına ait sonuçlar .	60
Tablo 10. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için R kompartımanına ait sonuçlar	60
Tablo 11. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için S kompartımanına ait sonuçlar.....	61
Tablo 12. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için Q kompartımanına ait sonuçlar.....	61
Tablo 13. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için I_S kompartımanına ait sonuçlar.....	62
Tablo 14. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için R kompartımanına ait sonuçlar	62
Tablo 15. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için S kompartımanına ait sonuçlar.....	63
Tablo 16. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için Q kompartımanına ait sonuçlar	63
Tablo 17. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için I_S kompartımanına ait sonuçlar	64
Tablo 18. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için R kompartımanına ait sonuçlar	64
Tablo 19. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile	

Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için S kompartımanı sonuçları.....	65
Tablo 20. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için Q kompartımanı sonuçları.....	65
Tablo 21. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için I_S kompartımanı sonuçları.....	66
Tablo 22. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için R kompartımanı sonuçları.....	66

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Normal dağılımın farklı parametreler ile olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	19
Şekil 2. Poisson sürecinin bir realizasyonu.	30
Şekil 3. Wiener sürecinin bir realizasyonu.....	32
Şekil 4. COVID-19 yayılım şeması (Ahmed vd., 2021)	44
Şekil 5. Deterministik çözümler	47
Şekil 6. Hastalığa duyarlı, hastalık bulaşmış ve karantinadaki insanların rastgele ve ortalama gerçekleştirmeleri.....	50
Şekil 7. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların rastgele ve ortalama gerçekleştirmeleri.....	50
Şekil 8. Hastalığa duyarlı, hastalık bulaşmış, karantinadaki insanların beklenti ve uç değerleri.....	51
Şekil 9. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların beklenti ve uç değerleri.....	51
Şekil 10. Hastalığa duyarlı, hastalık bulaşmış ve karantinadaki insanların rastgele ve ortalama gerçekleştirmeleri.....	53
Şekil 11. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların rastgele ve ortalama gerçekleştirmeleri.....	53
Şekil 12. Hastalığa duyarlı, hastalık bulaşmış ve karantinadaki insanların beklenti ve uç değerleri	54
Şekil 13. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların beklenti ve uç değerleri.....	54
Şekil 14. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların farklı difüzyon değerleri için çözümleri	56
Şekil 15. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların farklı difüzyon değerleri için çözümleri	59
Şekil 16. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak çözümleri	61
Şekil 17. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak çözümleri	63
Şekil 18. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların $\alpha = 0.10, 0.20$ $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar kullanılarak çözümleri	65

GİRİŞ

Bu çalışmada literatürde var olan bir deterministik COVID-19 modeli stokastik hale getirilerek incelenmektedir. Stokastik modelin farklı yöntemlerle çözümünden elde edilen sonuçların kullanılmasıyla hastalığın stokastik davranışları irdelenmektedir. İlk bölümde çalışmada kullanılacak temel kavramlar, salgın hastalıkların modellenmesi ve kullanılan yöntemlerle ilgili literatür ve stokastik sistemlerle ilgili genel bilgiler sunulmaktadır.

Amaç

2019 yılının sonunda Çin’de başlayan COVID-19 pandemisi 2023 yılının mayıs ayına kadar Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ) tarafından küresel acil durum olarak nitelendirilmiştir. Bu hastalığın dünyadaki yayılımı çoğunlukla deterministik olarak incelenmekte olup, doğal işleyişe daha uygun bir şekilde stokastik bir sistem kullanabileceği düşünülmektedir. Bu amaçla literatürde var olan bir deterministik sistem üzerinden stokastik gürültüler kullanılarak bir stokastik modelleme çalışması yapılması ve hastalığın dünya üzerinde yayılımının stokastik incelenmesinin yapılması amaçlanmaktadır. Bu çalışma literatürdeki deterministik modellerde göz ardı edilen rastgele dinamiklerin modellerde temsil edilmesi ve incelenmesi için farklı bir bakış açısı sunacaktır. Stokastik diferansiyel denklemler kullanılarak COVID-19 hastalığının yayılımının modellenmesi ile hastalığın toplumdaki ilerleyişinde yaşanabilecek olası dalgalanmaların daha etkin bir şekilde modellenmesi planlanmaktadır.

Matematiksel Modelleme

Matematiksel model en genel anlamıyla karşımıza çıkan herhangi bir olayın matematiksel kavramlar ve çeşitli denklemler ile ifade edilmesidir. Matematiksel model oluşturma sürecine de matematiksel modelleme denir. Fizik, kimya, tıp gibi doğa bilimlerinde, bilgisayar, inşaat gibi mühendislik alanlarında ve iktisat, sosyoloji, siyaset ve finans gibi alanlarda yani sosyal bilimlerde de matematiksel modeller kullanılabilmektedir.

Matematiksel model kullanılarak karşılaşılan sistem veya olay çözümlenebilmekte ve bu sistem veya olayı oluşturan etkenler incelenip, sonraki bir

durum hakkında tahminde bulunabilmektedir. Oluşturulan matematiksel modelin, deney ve gözlemler yapılarak olayla uyumu ölçülebilmekte ve arasındaki uyuşma eksikliği giderilerek ilerleme sağlanabilmektedir.

Bu sebeple karşılaşılan olay ile ilgili veriler toplandıktan sonra sahip olunan verilere göre denklem sistemi hazırlanıp model oluşturulabilmektedir. Denklem sistemindeki parametrelerin değerlerinin belirlenmesiyle ilgili çalışma yapılması mümkündür. Modellenen olay deterministik veya rastgele olarak iki grupta sınıflandırılabilir. Aynı koşullar altında deterministik bir model belirlenen başlangıç değerlerinde her zaman aynı sonuçları verirken, rastgele modelde rastgelelik olduğundan aynı koşullar altında farklı sonuçlar ile karşılaşılabilir.



1. GENEL BİLGİLER

1.1. Klasik Kompartımanlı Modeller

SIR modeli salgın bir hastalığın yayılmasının matematiksel olarak ifade edilmesinde kullanılan bir matematiksel modeldir. Bu model 1916'da Sir Roland Ross, 1917 yılında Ross ve Hudson, 1927'de İskoç biyokimyacı William Ogilvy Kermack ve İskoç fizyolog Anderson Gray McKendrick tarafından yapılan çalışmalar sonucunda 20. yüzyılının başlarında bulunmuştur ve birçok hastalığın yayılımı ile ilgili incelemelerin temelini oluşturmaktadır. SIR modelinde topluluk 3 gruba ayrılır.

S: hastalığa duyarlı kişiler (susceptible)

I: hasta kişiler (infected)

R: iyileşen kişiler (recovered)

sayısını ifade etmektedir.

İnsanlar hastalıkla ilgili durumlarına göre bu kompartımanlar arasında yer değiştirmektedir. Hastalığa duyarlı kişiler (S), bulaşıcı bir bireyle temasta bulunup enfekte olduktan sonra hastalanan kişi (I) kompartımanına geçmektedir. Enfekte olan bir kişi hastalıktan kurtulması ile de iyileşen kişiler (R) kompartımanına geçmektedir.

SIR modelinin ilk aşamasında hastalığa duyarlı kişiler β oranıyla hastalanırken diğer aşamada hasta olan kişiler γ oranıyla iyileşmektedir.

$$S \xrightarrow[\beta]{} I \xrightarrow[\gamma]{} R$$

β her bireyin birim zamanda temas ettiği insan sayısının hastalığı bulaştırma olasılığı ile çarpımı olan sabiti, γ ise iyileşme oranını ifade etmektedir.

Bu çalışmada SIR modelinin temel hali

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{-\beta SI}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I,\end{aligned}$$

kullanılmaktadır. Bu üç kompartımanın toplamı, herhangi bir t anında topluluğun toplam büyüklüğünün (nüfus) N olduğunu ifade eder.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

SIR modeli bu üç kompartımandaki değişimleri modelleyerek bireyler arasındaki yayılımını incelemeyi amaçlayan bir diferansiyel denklem sistemidir.

SIR modeli ile hastalık hakkında inceleme yapılırken toplulukta yaşanan değişimler uygun bazı varsayımlarla desteklenir.

SIR modelinde topluluktaki bireylerin hepsi S , I , R gruplarından herhangi birine ait olup, topluluk hacminin yeterince büyük olduğu varsayılmaktadır. Aynı zamanda toplulukta yaşanan doğum/ölüm oranının eşit kaldığı, benzer olarak göç alıp/verme oranının da eşit olduğu kabul edilmektedir. Böylelikle topluluktaki birey sayısı sabit kalmaktadır. Son olarak hastalığa karşı topluluktaki bireylerin doğuştan herhangi bir bağışıklığının olmadığı, hatta iyileştikten sonra kalıcı bağışıklık kazandığı ve her bireye hastalığın bulaşma olasılığının eşit olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayımlarla, bu gruplara dahil edilmeyen kesimin etkilerinin göz ardı edilebilecek düzeyde olduğu söylenebilmektedir (Bekiryazıcı, 2017).

Bu varsayımların gevşetilmesiyle SIR modeline yeni kompartımanlar eklenerek gelişmiş varyantları oluşturulabilmektedir. Örneğin hastalığın yayılımını azaltmak için aşılama yapılmasıyla V (vaccinated) kompartımanı eklenerek SIRV modeli elde edilebilen modellerden biridir. Kızamık hastalığı gibi doğuştan gelen bağışıklık için SIR modeline M (maternally-derived immunity) kompartımanı eklenerek MSIR modeli geliştirilebilmektedir. Birçok hastalıkta bireyler enfekte olmasına rağmen hasta olmadıkları için modele E (exposed) kompartımanı eklenerek SEIR modeli elde edilmektedir. Hastalık sonunda herhangi bir bağışıklık kazanmadığı durumlarda kişinin tekrardan hasta olma ihtimalinin olduğu durumlarda S kompartımanına dönmesiyle SIRS modeli oluşturulmaktadır. Hastalığın bulaştığı fakat hastalıkla ilgili herhangi bir belirti gösterilmeyen durumlarda A (asymptomatic) kompartımanı eklenerek SEIAR modeli oluşturulmaktadır. Hastalık kapan bireylerin karantinaya alınması halinde Q (quarantiend) kompartımanı denkleme eklenerek modelin yeni bir varyantı geliştirilmektedir.

1.2. Rastgele Modelleme

Günlük yaşantımızda gerçekleşen olayların matematiksel modellerle açıklanmasında deterministik denklemlerden yararlanılırken, denklemin oluşumunda kullanılan katsayılar, parametreler ve başlangıç değerlerinin sabit değerler alınması nedeniyle olayların gerçekleşmesindeki rastgelelik ihmal edilmektedir. Bu durumun önüne geçmek için gerçek hayattaki olayların açıklanması ve ilerideki davranışlarının nasıl olacağı hakkında tahminde bulunabilmek adına deterministik denklemler yerine rastgele diferansiyel denklemler ve stokastik süreçler tercih edilmektedir (Soong, 1973).

Deterministik diferansiyel denklemlerden yararlanılarak rastgele diferansiyel denklemler farklı şekillerde elde edilebilmektedir.

Tanım 1.2.1 (Rastgele Başlangıç Değerlerine Sahip Diferansiyel Denklemler): Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemi $t \in T$ için

$$X'(t) = f(X(t), t), X(t_0) = X_0$$

şeklinde ele alınsın. Bu diferansiyel denklem kullanılarak rastgele başlangıç değerine sahip bir diferansiyel denklem oluşturmak için $X(t_0) = X_0$ başlangıç değerinin bir rastgele değişken olarak alınması gerekir (Soong, 1973).

Örnek: $X'(t) + aX(t) = 0, t \geq 0, a \in \mathbb{R}$ şeklinde verilen bir birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem $X(t_0) = X_0$ başlangıç koşuluna sahip olsun. X_0 başlangıç koşulu λ parametresine sahip bir üstel dağılımlı rastgele değişken olarak alınarak birinci tip rastgele diferansiyel denklem elde edilebilir.

Bu denklemin çözümü olan $X(t)$ fonksiyonu X_0 başlangıç değerine bağlı olarak elde edileceğinden bir rastgele değişken olacaktır. Dolayısıyla rastgele diferansiyel denklemin çözümü de bir rastgele değişkendir (Najmuldeen, 2016).

Tanım 1.2.2 (Homojen olmayan kısımları rastgele olan diferansiyel denklemler): Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemi $t \in T$ için

$$X'(t) = f(X(t), t) + Y(t), \quad X(t_0) = X_0$$

şeklinde ele alınsın. Bu diferansiyel denklemi kullanarak rastgele homojen olmayan

terimlere sahip bir diferansiyel denklem oluşturmak için $Y(t)$ homojen olmayan kısmının bir rastgele değişken olarak alınması gerekir (Soong, 1973).

Tanım 1.2.3. (Rastgele Katsayılı Diferansiyel Denklemler): Birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemi $t \in T$ için

$$X'(t) + A(t)X(t) = Y(t), \quad X(t_0) = X_0$$

şeklinde ele alınsın. Bu diferansiyel denklemi kullanarak rastgele katsayılı diferansiyel denklem oluşturmak için $A(t)$ katsayısının bir rastgele değişken olarak alınması gerekir (Soong, 1973).

Rastgele diferansiyel denklemlerin matematiksel modelleme çalışmalarında kullanımı ile ilgili bazı örnekler literatürde mevcuttur. Padgett vd. tarafından 1977 yılında yapılan çalışmada rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılarak akarsulardaki kimyasal kirlenme ile ilgili inceleme yapılmış olup rastgele denklemler rastgele başlangıç koşulu ve rastgele homojen olmayan terim kullanılarak elde edilmiştir (Padgett vd., 1977). Najmuldeen tarafından 2016 yılında rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılarak Dang Humması hastalığının yayılımı incelenmiştir (Najmuldeen, 2016). Bekiryazıcı vd. tarafından 2017 yılındaki bir çalışmada rastgele ve stokastik diferansiyel denklem sistemlerinin birlikte ele alınmasını içeren bir çalışmayla Sıtma hastalığının yayılımı ele alınmıştır (Bekiryazıcı vd., 2017). Casaban vd. tarafından 2017 yılında yapılan çalışmada rastgele katsayılar içeren Bernoulli diferansiyel denklemi incelenmiştir (Casaban vd., 2017). Stanescu vd. tarafından 2009 yılında yapılan çalışmada bakteri üremesinin modellenmesi rastgele katsayılı denklemlerle incelenmiştir (Stanecu vd., 2009). Bekiryazıcı vd. tarafından 2018 yılında yapılan çalışmada deterministik bir sistemi temel alan bir rastgele diferansiyel denklem sistemiyle Çocuk Felci hastalığının yayılımı incelenmiştir (Bekiryazıcı vd., 2018). Khudair vd. tarafından 2011 yılında yapılan bir çalışmada rastgele katsayı, başlangıç değer ve homojen olmayan terime sahip denklemlerin çözümleri için varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılmıştır (Khudair vd., 2011). Merdan ve Khaniyev tarafından 2008 yılındaki çalışmada Kuş Gribi hastalığının yayılımı için rastgele bir model ele alınmıştır (Merdan ve Khaniyev, 2008). Merdan vd. tarafından 2018 yılında yapılan çalışmada Ebola hastalığı rastgele olarak

incelenmektedir (Merdan vd., 2018). Merdan vd. tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada rastgele olarak Hepatit C hastalığının yayılımı ele alınmıştır (Merdan vd., 2017).

1.3. Olasılık Teorisi İle İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılacak olan olasılık teorisi ile ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1.3.1. Bir deneyin tüm olanaklı sonuçlarının kümesi S örnek uzayı olarak tanımlanır. Bir örnek uzaydaki bir elemana örnek nokta denir. Bir olay, herhangi bir deney için S örnek uzayın bir alt kümesidir (Akdeniz, 2018).

Tanım 1.3.2. Bir olay, S örnek uzayının bir alt kümesi olduğundan, S nin kendisi ve $\emptyset$ (boş küme) de birer olaydır; $\emptyset$ ye olanaksız olay denir. Kesin olay her zaman elde edilen, olanaksız olay ise elde edilemeyendir (bir deneyde herhangi bir olayın elde edilemediğini gösterir).

Tanım 1.3.3. Gerçekleşmesi rastlantıya bağlı olan olaya rastgele olay denir.

Tanım 1.3.4. $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B olayları ayrıktyrlar; yani A ve B nin kesişimi boş kümedir.

Tanım 1.3.5. $A_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$) ise; $A_1, A_2, \dots, A_n$ olayları ikişerli ayrıktyrlar.

Tanım 1.3.6. Bir deney, eşit olasılıklı N farklı sonuç verirse ve bu sonuçların M tanesi bir A olayına uygun ise, A olayının $P(A)$ ile gösterilen gerçekleşme olasılığı

$$P(A) = \frac{\text{Uygun sonuçların sayısı}}{\text{Örnek uzaydaki tüm sonuçların sayısı}} = \frac{M}{N}$$

dır.

Tanım 1.3.7. D bir deney ve S bu deneyin örnek uzayı olsun. O halde S deki bir A olayının $P(A)$ olasılığıyla ilgili aşağıdaki aksiyomlar vardır:

- i. $P(A) \geq 0$,
- ii. $P(S) = 1$,

iii. $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ bir S örnek uzayında sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta ikişerli ayrık olaylar dizisi olsun.

Bu durumda

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

dir. Aksiyomlarla belirlenen $P(\cdot)$ fonksiyonu bir rastgele deneyin örnek uzayı üzerinde bir “olasılık ölçüsü” dür.

Tanım 1.3.8. Sürekli örnek uzay, uzunluk, alan, hacim gibi sonlu bir geometrik ölçüme sahiptir. Bu ölçüm $m(S)$ ile gösterilirse bir A olayının olasılığı, (A ya ait tüm noktaların olasılığı)

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)}$$

şeklindedir.

$$P(A) = \frac{A \text{ nın uzunluğu}}{S \text{ nin uzunluğu}} \text{ veya } P(A) = \frac{A \text{ nın alanı}}{S \text{ nin alanı}} \text{ veya } P(A) = \frac{A \text{ nın hacmi}}{S \text{ nin hacmi}}.$$

Burada ölçüm için hangi kavramın kullanılacağı incelenen duruma göre belirlenir.

Tanım 1.3.9. A ve B , bir S örnek uzayında iki olay olsun. B verilmişken, A olayının koşullu olasılığı $P(A/B)$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, (P(B) \neq 0 \text{ ise})$$

Benzer şekilde

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, (P(A) \neq 0 \text{ ise}).$$

İlk denkleminin iki yanını $P(B)$ ile çarparsak,

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

buluruz. $A \cap B = B \cap A$ olduğundan, ayrıca

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

yazılabilir.

Tanım 1.3.10. (Örnek uzayın parçalanışı)

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$ tüm $i \neq j$ ler için

b) $\bigcup_{i=1}^k B_i = S$

c) $P(B_i) > 0$ tüm i ler için

ise $B_1, B_2, \dots, B_k$ olayları S örnek uzayının bir parçalanışını gösterir.

Tanım 1.3.11. A ve B olaylarının bağımsız olması için gerek ve yeter koşul

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.3.12. (Olayların tam bağımsızlığı) m olayın tam bağımsız (karşılıklı bağımsız) olabilmeleri için gerek ve yeter koşul bir defada alınan herhangi sayıdaki olayın her bir kombinasyonunun bağımsız olmasıdır.

Tanım 1.3.13. Değeri bir deney sonucuyla belirtilen bir değişkene rastgele değişken denir (Akdeniz, 2018).

Tanım 1.3.14. (Kesikli rastgele değişken) X bir rastgele değişken olsun. X in alabileceği değerlerin sayısı sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta ise X e kesikli rastgele değişken denir.

Tanım 1.3.15. (Sürekli rastgele değişken) X bir rastgele değişken olsun. X bir aralıkta ya da birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X e sürekli rastgele değişken denir.

Tanım 1.3.16. (Olasılık fonksiyonu) X , sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ olasılıkları ile alabilen kesikli rastgele değişken olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X in olasılık fonksiyonu denir.

1. $f(x_i) \geq 0$, her x_i için

2. $\sum_{i=1}^N f(x_i) = 1$

Böylece X rastgele değişkenin olasılık fonksiyonu aşağıdaki formdadır.

$X = x$	x_1	x_2	...	x_N
$f(x) = P(X = x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_N)$

Tanım 1.3.17. (Dağılım fonksiyonu) Bir X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile gösterilir ve X in x e eşit ya da daha küçük olması olasılığıdır. O halde,

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

dir.

Tanım 1.3.18. X sayılabilir sonsuzluktaki $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ değerlerini alan kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu değerlere karşılık gelen olasılıklar $f(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N, \dots$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir.

1. $f(x) \geq 0$, tüm x ler için

2. $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

Tanım 1.3.19. (Olasılık yoğunluk fonksiyonu) X , değerleri $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rastgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

1. $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, $(f(x))$ eğrisi altında kalan ve x -ekseni ile sınırlanan alan 1'e eşittir).

Tanım 1.3.20. (Dağılım fonksiyonu) X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rastgele değişken olsun. X in dağılım fonksiyonu

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.3.21. (Beklenen değer) X bir kesikli rastgele değişken olsun. X in $E(X)$ ile gösterilen beklenen değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(X) = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \cdots + x_Nf(x_N) = \sum_{i=1}^N x_i f(x_i).$$

X rastgele değişkeni sayılabilir sonsuzluktaki $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ sonuçlarını alıyorsa

$$E(X) = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \cdots + x_Nf(x_N) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

olur. Bu $E(X)$ sayısına ayrıca X rastgele değişkenin ortalaması ya da kitle (population) ortalaması denir.

Tanım 1.3.22. (Beklenen değer) X bir boyutlu sürekli bir rastgele değişken olsun. $f(x)$, X in olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, X in beklenen değeri (ortalaması), $E(X)$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad -\infty < x < \infty.$$

Tanım 1.3.23. a) X bir kesikli rastgele değişkeni verilsin. Y , X in fonksiyonu olsun. Bu takdirde yeni rastgele değişken $Y = g(X)$ in beklenen değeri

$$E[g(X)] = g(x_1)f(x_1) + g(x_2)f(x_2) + \cdots + g(x_N)f(x_N)$$

ya da

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{i=1}^N g(x_i) \cdot f(x_i)$$

dir.

b) X , $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rastgele değişken ise

$$E(g(X)) = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

dir.

Tanım 1.3.24. (Varyans) X olasılık fonksiyonu verilmiş olan kesikli rastgele değişken olsun. X in ortalaması $E(X) = \mu$ ise X in varyansı, $Var(X)$ veya σ_X^2 , aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

ya da eşdeğer olarak,

a) X kesikli rastgele değişken ise

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

dir.

b) X sürekli rastgele değişken ise

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

dir. Yani, X in varyansı, X in kendi ortalamasından sapmasının karesinin ortalamasıdır.

Tanım 1.3.25. X , μ ortalamalı kesikli ya da sürekli bir rastgele değişken olsun. X in standart sapması, σ_X , varyansının kareköküdür ve aşağıdaki eşitlikle verilmektedir.

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X - \mu)^2}.$$

Tanım 1.3.26. X ve Y rastgele değişkenlerinin ortalamaları μ_X ve μ_Y olmak üzere

$$E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)]$$

beklenen değerine X ve Y arasındaki kovaryans denir ve σ_{XY} ya da $Cov(X, Y)$ ile gösterilir.

X ve Y arasındaki kovaryansı hesaplamak için

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

formülü tercih edilir. Kovaryans X ve Y nin birbiriyle nasıl ilişkiye sahip olduğunu gösterir. X ve Y istatistiksel olarak birbirinden bağımsız iseler $E(XY) = E(X)E(Y)$ olacağından $Cov(X, Y) = 0$ olur. Bu gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 1.3.27. (Pearson korelasyon katsayısı) X ve Y , $E(X)$ ve $E(Y)$ ortalamaları ve $Var(X)$ ile $Var(Y)$ varyanslarına sahip olsunlar. X ve Y arasındaki korelasyon ρ_{XY} ile gösterilir ve

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.3.28. $g(X) = X^k$ fonksiyonunun beklenen değerine X rastgele değişkeninin 0 a göre k -ıncı mertebeden momentleri denir. Yani

$$m_k = E(X^k)$$

dır.

Tanım 1.3.29. $E[(X - c)^k]$ beklenen değerine c noktasına göre k -ıncı mertebeden moment denir. $c = m_1 = E(X)$ alınırsa $E[X - E(X)]^k$ değerine, beklenen değere (veya ortalamaya) göre k -ıncı mertebeden moment denir. Beklenen değere göre momentlere merkezi momentler denir ve $\mu_k = E[X - E(X)]^k$ ile gösterilir. $c = 0$ noktasına göre momentlere adi momentler denir.

Tanım 1.3.30. (Moment çıkaran fonksiyon) X bir rastgele değişken olsun. $h > 0$ olmak üzere $|t| < h$ aralığında her değeri alan t için e^{tX} in beklenen değeri X in moment çıkaran fonksiyonu olarak tanımlanır.

a) $X, f(x)$ olasılık fonksiyonuna sahip kesikli bir rastgele değişken olsun. X in moment çıkaran fonksiyonu

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

dir.

b) $X, f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken olsun. X in moment çıkaran fonksiyonu

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

dir.

Teorem 1.3.1. A_1 ve A_2 , bir S örnek uzayında $A_1 \subset A_2$ olacak biçimde iki olay ise $P(A_1) \leq P(A_2)$ dir.

Teorem 1.3.2. Herhangi bir $A \subset S$ olayı için $P(A) \leq 1$ dir.

Teorem 1.3.3. A , bir S örnek uzayında herhangi bir olay olsun. $P(A') = 1 - P(A)$ dır.

Teorem 1.3.4. $P(\emptyset) = 0$ dır.

Teorem 1.3.5. Bir S örnek uzayındaki A ve B olayları için

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

dir.

Teorem 1.3.6. A ve B , S örnek uzayında iki olay olsun.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dır.

Teorem 1.3.7. A_j ler ($j = 1, 2, \dots, n$) bir S örnek uzayında olaylarsa,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n P(A_j)$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 1.3.8. (Koşullu olasılık için çarpma teoremi) $A_1, A_2, \dots, A_n$ olayları bir deneyin S örnek uzayında ise

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 1.3.9. (Bir parçalanış altında olasılık) $B_1, B_2, \dots, B_k$ sonlu bir S örnek uzayının bir parçalanışı ise

$$P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k) = 1$$

dir.

Teorem 1.3.10. $B_1, B_2, \dots, B_k$ lar bir S örnek uzayının bir parçalanışı ise S deki herhangi bir A olayı için

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A/B_i)$$

dir.

Teorem 1.3.11. A ve B ($P(A) \neq 0$ ve $P(B) \neq 0$) bağımsız olaylarsa A ve B kümelerinin en az bir ortak örnek noktası vardır. Yani $A \cap B \neq \emptyset$ dir.

Teorem 1.3.12. Üç ya da daha çok olay bağımsız olduklarında, onların aynı anda elde edilmelerinin olasılığı, olasılıklarının çarpımına eşittir. Örneğin E, F ve G bağımsızsa,

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G)$$

eşitliği yazılır.

Teorem 1.3.13. (Bağımsız olaylar) E ve F bir S örnek uzayında bağımsız olaylar olsun. O halde, E ve F' , E' ve F ile E' ve F' bağımsızdırlar.

Teorem 1.3.14. (Bayes teoremi) $B_1, B_2, \dots, B_k$ lar bir S örnek uzayının bir parçalanışı olsun. A, S içinde $P(A) \neq 0$ olan bir olay ise ($r \in 1, \dots, k$ için)

$$P(B_r/A) = \frac{P(B_r)P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A/B_i)}$$

dir.

Teorem 1.3.15. a) F azalmayan bir fonksiyondur. Yani, $x_1 < x_2$ ise $F(x_1) \leq F(x_2)$ dir.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Teorem 1.3.16. a) Sürekli X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olsun. Bu takdirde bütün x değerlerinde diferansiyellenebilir F fonksiyonu için

$$f(x) = \frac{d}{dx}(F(x))$$

ve $a \leq b$ olmak üzere herhangi a ve b gerçel sayıları için

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

dır.

b) $X, x_1 < x_2 < \dots$ gibi sıralı $x_1, x_2, \dots$ değerlerini alabilen kesikli rastgele değişken olsun. $F(x)$, X in dağılım fonksiyonu ise bu takdirde $f(x_1) = F(x_1)$ ve $f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ dir.

Teorem 1.3.17. a ve b sabitler ve X rastgele değişken ise

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

dir.

Teorem 1.3.18. Ortalamaları $E(X)$ ve $E(Y)$ olan X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $f(x_i, y_j), i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$ olsun. Bu takdirde

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

dir. Yani iki rastgele değişkenin toplamının ortalaması onların ortalamalarının toplamına eşittir.

Teorem 1.3.19. Ortalamaları $E(X)$ ve $E(Y)$ olan bağımsız X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu $f(x_i, y_j); i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N$ olsun. Bu takdirde

$$E(X, Y) = E(X)E(Y)$$

dir. Yani, iki bağımsız rastgele değişkenin çarpımının ortalaması, ortalamalarının çarpımına eşittir.

Teorem 1.3.20. X , $E(X) = \mu$ ortalamalı ve $Var(X) = \sigma^2$ varyanslı bir rastgele değişken ise

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

dir.

Teorem 1.3.21. a bir sabit ve X bir rastgele değişken olsun.

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

ya da

$$\sigma_{aX}^2 = a^2 \sigma_X^2$$

dir. Yazı ile ifade edilirse, bir a sabitiyle çarpılmış X rastgele değişkeninin varyansı a^2 ile X in varyansının çarpımına eşittir.

Teorem 1.3.22. b bir sabit ve X rastgele değişken olsun.

$$Var(X + b) = Var(X)$$

ya da

$$\sigma_{X+b}^2 = \sigma_X^2$$

dir. Yazı ile ifade edilirse, bir rastgele değişkenin her bir değerine eklenen sabit miktarı varyansı etkilememektedir.

Teorem 1.3.23. X ve Y ortalamaları sırasıyla $E(X) = \mu_X, E(Y) = \mu_Y$, varyansları $Var(X) = \sigma_X^2, Var(Y) = \sigma_Y^2$ olan bağımsız iki rastgele değişken olsunlar.

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

ya da

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

dir.

Teorem 1.3.24. $X_1, X_2, \dots, X_N, E(X_i) = \mu_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) ortalamalı ve $Var(X_i) = \sigma_i^2$ varyanslı ($i = 1, 2, \dots, N$) bağımsız rastgele değişkenler olsun.

$$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_N)$$

ya da

$$\sigma_{X_1+X_2+\dots+X_N}^2 = \sigma_{X_1}^2 + \dots + \sigma_{X_N}^2$$

dir.

Teorem 1.3.25. ρ_{XY} korelasyon katsayısı -1 ve $+1$ arasında değer alır.

Teorem 1.3.26. X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $m_X(t)$ olsun.

$$\left. \frac{d^r m_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = m_r = E(X^r)$$

dir.

Teorem 1.3.27. a) $m_{X+a}(t) = E(e^{t(X+a)}) = e^{at} m_X(t)$,

b) $m_{bX}(t) = E(e^{tbX}) = m_X(bt)$,

c) $m_{\frac{X+a}{b}}(t) = E\left(e^{\frac{X+a}{b}t}\right) = e^{\frac{a}{b}t} m_X\left(\frac{t}{b}\right)$

dir.

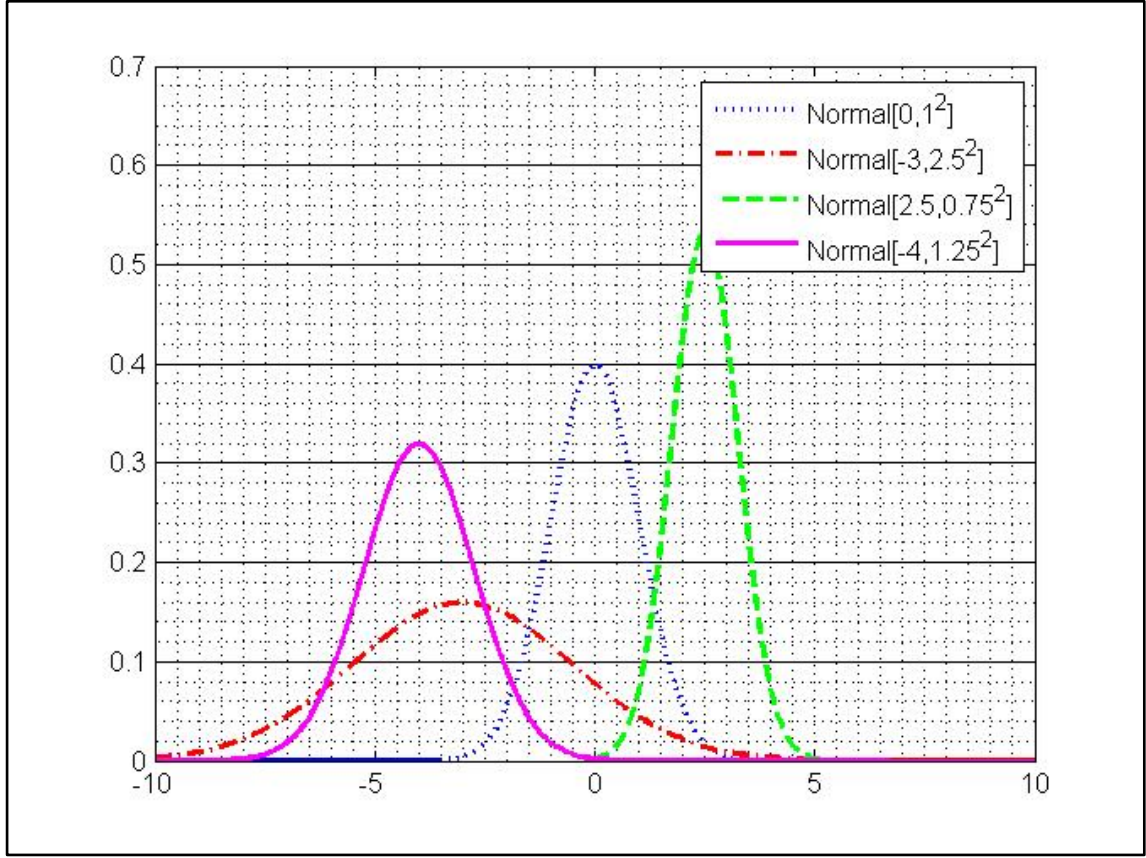
Tanım 1.3.31. (Normal dağılım) Sürekli bir X rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$$

ise X normal dağılıma sahiptir denir. Burada μ ile Normal dağılımın ortalaması ve σ ile Normal dağılımın standart sapması gösterilmektedir. Bu rastgele değişken $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde de gösterilir.

Normal dağılımın farklı ortalama parametresi μ ve varyans parametresi σ^2 değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonunun aldığı şekil aşağıda gösterilmektedir

(Şekil 1). Bu şekilde $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ olan eğri özel olarak standart Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun eğrisini belirtmektedir.



Şekil 1. Normal dağılımın farklı parametreler ile olasılık yoğunluk fonksiyonu

Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu f aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- $x = \mu$ ortalaması civarında simetriktir.
- f fonksiyonunun değeri ortalama, mod ve medyanı olan $x = \mu$ değerine kadar artar ve bu noktadan sonra azalır.
- f fonksiyonun grafiği $\mu - \sigma$ ve $\mu + \sigma$ noktaları arasında aşağıya doğru, diğer noktalarda yukarı doğru bükülür. Yani bükülme noktaları $x = \mu \pm \sigma$ 'dir.
- $x \rightarrow \infty$ ve $x \rightarrow -\infty$ için $f(x) \rightarrow 0$ olur.

F dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- Φ standart normal dağılım, F normal dağılım fonksiyonu olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ şeklindedir.
- Normal dağılımın medyanı $x = \mu$ 'dür. Dolayısıyla $F(\mu) = \frac{1}{2}$ dir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise X rastgele değişkeninin ortalaması ve varyansı aşağıdaki gibidir.

a. $E(X) = \mu$

b. $Var(X) = \sigma^2$

Her $n \in \mathbb{N}$ için, (Forbes vd., 2011).

a. $E[(X - \mu)^{2n}] = 1.3 \dots (2n - 1)\sigma^{2n} = (2n)! \sigma^{2n} / (n! 2^n),$

b. $E[(X - \mu)^{2n+1}] = 0.$

X rastgele değişkeninin çarpıklığı ve basıklığı aşağıdaki gibi verilir.

a. $skew(X) = 0,$

b. $kurt(X) = 3.$

Normal dağılım basıklığı (kurtosis) literatürde ve bazı kaynaklarda normalize edilmiş haliyle (excess kurtosis) $kurt(X) = 0$ olarak verilir.

Moment çıkaran fonksiyon M ve karakteristik fonksiyon φ şu şekilde tanımlanır.

a. $M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right), t \in \mathbb{R}.$

b. $\varphi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right), t \in \mathbb{R}.$

X rastgele değişkeni μ ortalama ve σ^2 varyansı ile normal dağılıma sahip olsun. Eğer $a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise $a + bX$ rastgele değişkenin ortalaması $a + b\mu$ ve varyansı $b^2\sigma^2$ dir.

a. X rastgele değişkeni μ ortalama ile σ standart sapmasına sahip olsun. O zaman $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ standart normal dağılıma sahiptir.

b. Eğer $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma \in (0, \infty)$ için Z rastgele değişkeni standart normal dağılıma sahip ise $X = \mu + \sigma Z$, μ ortalama ve σ standart sapması ile normal dağılıma sahiptir.

Farz edelim ki X_1 ve X_2 bağımsız rastgele değişkenler olsunlar ve X_i rastgele değişkeni μ_i ortalama ve σ_i^2 varyansı ile normal dağılıma sahip olsun. $i \in \{1, 2\}$ için $X_1 + X_2$ normal dağılıma sahiptir.

a. $E(X_1 + X_2) = \mu_1 + \mu_2,$

b. $Var(X_1 + X_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$

$1 \leq i \leq n$ için X_i bağımsız rastgele değişkenleri ortalamaları μ_i ve varyansları σ_i^2 olmak üzere normal dağılıma sahip olsunlar. Bu durumda $X_1 + \dots + X_n$ rastgele değişkeni ortalaması $\sum_{i=1}^n \mu_i$ ve varyansı $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ olan normal dağılıma sahiptir

(Chung, 2012).

Standart normal dağılım, ortalaması $\mu = 0$, varyansı $\sigma^2 = 1$ ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ϕ ile verilen

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, z \in \mathbb{R}$$

normal dağılımdır.

Standart normal yoğunluk fonksiyonu ϕ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- a. $\phi, z = 0$ ortalaması civarında simetriktir.
- b. ϕ fonksiyonu ortalama, mod ve medyanı olan $z = 0$ değerine kadar artar ve bu noktadan sonra azalır.
- c. $\phi, z = -1$ ve $z = +1$ doğruları arasında aşağıya doğru, diğer aralıklarda yukarıya doğru bükülür. Bükülme noktaları $z = \pm 1$.
- d. $z \rightarrow \infty$ ve $z \rightarrow -\infty$ için $\phi(z) \rightarrow 0$ olur.

Standart normal dağılım fonksiyonu Φ aşağıdaki özellikleri sahiptir:

- a. $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, $z \in \mathbb{R}$ için,
- b. $\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}(1 - p)$, $p \in (0,1)$ için,
- c. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ olup medyanı 0'dır.

Z rastgele değişkeninin ortalaması ve varyansı aşağıdaki gibidir.

- a. $E(Z) = 0$,
- b. $Var(Z) = 1$.

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için, $E(Z^{n+1}) = nE(Z^{n-1})$ (Forbes vd., 2011)

- a. $E(Z^{2n+1}) = 0$,
- b. $E(Z^{2n}) = 1.3 \dots (2n)!/(n! 2^n)$.

Z rastgele değişkeninin çarpıklığı ve basıklığı aşağıdaki gibidir.

- a. $skew(Z) = 0$,
- b. $kurt(Z) = 3$.

Standart normal dağılım basıklığı (kurtosis) literatürde ve bazı kaynaklarda normalize edilmiş haliyle (excess kurtosis) $kurt(Z) = 0$ olarak verilir.

Moment çıkaran fonksiyon m ve karakteristik fonksiyonu φ şu şekilde tanımlanır.

a. $m(t) = e^{t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$ için.

b. $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$ için.

1.4. Stokastik Süreçlerle İle İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılacak olan stokastik süreçlerle ilgili temel kavramlar verilecektir.

Tanım 1.4.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı olsun. $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bir stokastik süreç olarak adlandırılır. Bir stokastik süreç iki değişkenli ve gerçel değerli bir fonksiyondur. $X(\omega, t)$ fonksiyonu $\omega \in \Omega, t \in T$ argümanlarına sahiptir ve T zaman parametresi olarak yorumlanır ve çoğunlukla $[0, \infty)$ olarak kullanılır (Çapar, 2013).

Stokastik süreç en basit anlamda $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenlerinin bir topluluğudur.

Tanım 1.4.2. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ olsun. $X(\omega, t_1), X(\omega, t_2), \dots, X(\omega, t_n)$ rastgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonuna, yani

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega: X(\omega, t_1) \leq x_1, \dots, X(\omega, t_n) \leq x_n\}, x_i \in \mathbb{R}$$

fonskiyonuna $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin n -boyutlu dağılım fonksiyonu denir.

T 'nin elemanı olan tüm mümkün $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 'lerin yardımı ile oluşturulan n -boyutlu $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonlarının ailesine stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları denir.

Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $F_{t_1, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty)$,

2. $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$,

burada $i_1, i_2, \dots, i_n$ indislerin yer değişimini göstermektedir.

İlk özelliğe göre herhangi bir n boyutundan dağılım fonksiyonu bilinirse $(n - 1)$ boyutlu dağılım fonksiyonunun da elde edilmesi mümkündür. İkinci olarak ise sonlu boyutlu dağılım fonksiyonunun indislerinin yer değişimine göre değişmezlik özelliği gösterilmektedir (Aliyev, 2010).

Teorem 1.4.1. (Kolmogorov Teoremi) $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, x_i \in \mathbb{R}, t_i \in T, t_1 < \dots < t_n, n \geq 1$ yukarıdaki 1 ve 2 özelliklerine sahip sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları ailesi olsun. Bu durumda öyle bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı ve $X(\omega, t)$ stokastik süreci vardır ki

$$P\{\omega: X(\omega, t_1) \leq x_1, \dots, X(\omega, t_n) \leq x_n\} = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Bu teoreme göre stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini birebir tanımlamaktadır (Aliyev, 2010).

Tanım 1.4.3. Eğer $X(\omega, t)$ ve $Y(\omega, t)$ stokastik süreçleri her sabit tutulmuş $t \in T$ için

$$P\{\omega: X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

şartını sağlıyor ise bu süreçlere stokastik denk süreçler denir.

Teorem 1.4.2. Stokastik denk süreçlerin sonlu boyutlu dağılımları aynıdır. Bu teoremin tersi doğru değildir (Çapar, 2013).

Teorem 1.4.2'ye göre stokastik süreçlerin sonlu boyutlu dağılımları aynı olmasına rağmen bu süreçler realizasyonları farklı özelliklere sahip olabilir.

Stokastik süreçler incelenirken bir ve iki boyutlu dağılımlarının bilinmesi önemlidir. Tanım 1.4.2'de $n = 1$ olarak alınırsa sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu elde edilir:

$$F_t(x) = P\{\omega: X(\omega, t) \leq x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in T.$$

Eğer her bir t sabit tutulduğunda, stokastik sürecin değerleri olan rastgele değişkenler mutlak sürekli ise bu durumda, o stokastik süreç için olasılık yoğunluk fonksiyonunu tanımlamak mümkündür. Örneğin, türevin mevcut olduğu noktalarda bir boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p_t(x) = \frac{\partial F_t(x)}{\partial x}.$$

Benzer biçimde, Tanım 1.4.2'de $n = 2$ olarak alınırsa sürecin iki boyutlu dağılım fonksiyonu elde edilir:

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P\{\omega: X(\omega, t_1) \leq x_1, X(\omega, t_2) \leq x_2\}, t_1, t_2 \in T.$$

Stokastik sürecin iki boyutlu dağılım fonksiyonu ise

$$p_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{t_1, t_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

şeklindedir.

Stokastik sürecin iki boyutlu dağılım fonksiyonu bilindiğinde, bir boyutlu dağılım fonksiyonunu elde etmek mümkündür:

$$F_{t_1}(x_1) = F_{t_1, t_2}(x_1, \infty).$$

Gerçekten de,

$$\begin{aligned} F_{t_1, t_2}(x_1, \infty) &= P\{\omega: X(\omega, t_1) \leq x_1, X(\omega, t_2) \leq \infty\} \\ &= P\{\omega: X(\omega, t_1) \leq x_1, \Omega\} = P\{\omega: X(\omega, t_1) \leq x_1\}. \end{aligned}$$

Sürecin iki boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu bilindiğinde, bir boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$p_{t_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1, t_2}(x_1, x_2) dx_2, \quad p_{t_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1, t_2}(x_1, x_2) dx_1.$$

Benzer biçimde, $n = 3$ için üç boyutlu, $n = 4$ için dört boyutlu dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonları elde edilebilir.

Tanım 1.4.4. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her t için $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_t(x) < \infty$ ise

$$E(X(\omega, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x)$$

integraline $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin beklenen değeri denir (Aliyev, 2010). Stokastik sürecin beklenen değeri $E(X(\omega, t))$ sembolü ile gösterilmektedir.

Stokastik sürecin beklenen değerinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

i. Rastgele olmayan $\varphi(t)$ fonksiyonun beklenen değeri kendisine eşittir:

$$E(\varphi(t)) = \varphi(t).$$

ii. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç ve $\varphi(t)$ rastgele olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$E(\varphi(t)X(\omega, t)) = \varphi(t)E(X(\omega, t))$$

dir.

iii. $X(\omega, t)$ ve $Y(\omega, t)$ stokastik süreçler olmak üzere, her $t \in T$ için

$$E(X(\omega, t) \pm Y(\omega, t)) = E(X(\omega, t)) \pm E(Y(\omega, t)).$$

Beklenen değerin bu üç özelliği de tanımdan elde edilmiş olur.

Tanım 1.4.5. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun.

$$V_X(t) = \text{Var}(X(\omega, t)) = E\left(\left(X(\omega, t) - E(X(\omega, t))\right)^2\right)$$

fonksiyonuna $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin varyansı denir (Aliyev, 2010).

Stokastik sürecin varyansı t 'ye bağlı rastgele olmayan bir fonksiyon olup, sürecin realizasyonlarının beklenen değeri etrafında nasıl yayıldığını gösteren bir karakteristiktir. Varyansın tanımından yararlanarak aşağıdaki formül elde edilir:

$$V_X(t) = E(X^2(\omega, t)) - \left(E(X(\omega, t))\right)^2$$

Stokastik sürecin varyansının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

i. Varyans negatif değerler alamaz:

$$V_X(t) = \text{Var}(X(\omega, t)) \geq 0.$$

ii. Rastgele olmayan $\varphi(t)$ fonksiyonunun varyansı sıfırdır:

$$V_\varphi(t) = \text{Var}(\varphi(t)) = 0.$$

iii. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç ve $\varphi(t)$ rastgele olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$Var(\varphi(t)X(\omega, t)) = \varphi^2(t)Var(X(\omega, t)).$$

iv. $X(\omega, t)$ bir stokastik süreç ve $\varphi(t)$ rastgele olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$Var(X(\omega, t) + \varphi(t)) = Var(X(\omega, t))$$

Varyansın tanımından bu dört özellik de elde edilir.

Tanım 1.4.6. $\sigma_X(t) = \sqrt{V_X(t)}$ fonksiyonuna $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin standart sapması denir (Aliyev, 2010).

Tanım 1.4.7. Stokastik sürecin beklenen değeri ve varyansı çok önemli karakteristiklerdir. Ancak bunlar sürecin t_1 ve t_2 anları arasındaki ilişkiyi ifade etmemektedir. Yani o ilişkinin kuvvetli mi, zayıf mı olduğu veya karakterinin ne olduğunu göstermemektedir. Bu ilişkiyi vermek için yeni bir kavrama ihtiyaç duyulur. Bu kavram ise sürecin kovaryans fonksiyonudur.

$$K_X(t_1, t_2) = E \left[\left(X(\omega, t_1) - E(X(\omega, t_1)) \right) \left(X(\omega, t_2) - E(X(\omega, t_2)) \right) \right]$$

fonksiyonuna $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin kovaryans fonksiyonu denir (Aliyev, 2010).

Literatürde kovaryans fonksiyonu $cov(X(t_1), X(t_2))$ gibi de gösterilmektedir.

Görüldüğü üzere, sürecin kovaryans fonksiyonu iki değişkenli rastgele olmayan bir fonksiyondur. Sürecin beklenen değer ve varyansının bulunması için sürecin bir boyutlu dağılımının bilinmesi yeterli olmasına karşın, sürecin kovaryans fonksiyonunun elde edilmesi için iki boyutlu dağılımının bilinmesi gereklidir. Genellikle sürecin kovaryans fonksiyonunu bulmak için aşağıdaki formül kullanılır:

$$K_X(t_1, t_2) = E(X(\omega, t_1)X(\omega, t_2)) - E(X(\omega, t_1))E(X(\omega, t_2)).$$

Burada

$$E(X(\omega, t_1)X(\omega, t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{t_1 t_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

dir.

Stokastik sürecin kovaryans fonksiyonunun bazı özellikleri şöyledir:

i. Stokastik sürecin kovaryans fonksiyonu simetrik bir fonksiyondur.

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1).$$

ii. $t_1 = t_2 = t$ olduğunda stokastik sürecin kovaryans fonksiyonu onun varyansına dönüşmektedir.

$$K_X(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=t} = V_X(t).$$

iii. $\forall t_1, t_2 \in T$ için

$$|K_X(t_1, t_2)| \leq \sqrt{V_X(t_1)V_X(t_2)} \text{ veya } |K_X(t_1, t_2)| \leq \sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)$$

olur.

iv. $X(\omega, t)$ stokastik süreç ve $\varphi(t)$ rastgele olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $Y(\omega, t) = X(\omega, t) + \varphi(t)$ stokastik sürecinin kovaryans fonksiyonu $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin kovaryans fonksiyonuna eşittir.

$$K_Y(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2).$$

v. $X(\omega, t)$ stokastik süreç ve $\varphi(t)$ rastgele olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $Y(\omega, t) = \varphi(t)X(\omega, t)$ stokastik sürecinin kovaryans fonksiyonu şöyledir.

$$K_X(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_X(t_1, t_2).$$

vi. Her $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_X(t_i, t_j) x_i x_j \geq 0.$$

Tanım 1.4.8. $X(\omega, t)$ stokastik süreç olsun.

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{V_X(t_1)V_X(t_2)}}, t_1, t_2 \in T$$

fonksiyonuna stokastik sürecin korelasyon fonksiyonu denir (Aliyev, 2010).

Literatürde korelasyon fonksiyonu $\text{corr}(X(t_1), X(t_2))$ gibi de gösterilmektedir.

Stokastik sürecin korelasyon fonksiyonunun özelliklerini şöyledir.

i. Sürecin korelasyon fonksiyonu simetrik bir fonksiyondur. Yani $\forall t_1, t_2 \in T$ için

$$\rho_X(t_1, t_2) = \rho_X(t_2, t_1) \text{ dır.}$$

ii. Her $t_1, t_2 \in T$ için

$$|\rho_X(t_1, t_2)| \leq 1$$

doğrudur.

1.4.1. Bazı Özel Stokastik Süreçler

Tanım 1.4.1.1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenleri her bir $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ için

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

rastgele değişkeni normal dağılıma sahip bir rastgele değişken ise, ortak olarak normal dağılıma sahiptirler (Pishro-Nik, 2016).

Tanım 1.4.1.2. Bir $\{X(t), t \in J\}$ rastgele süreci, eğer her bir $t_1, t_2, \dots, t_n \in J$ için $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ ortak olarak normal dağılıma sahip iseler, bir Gauss rastgele (stokastik) süreci olarak adlandırılır (Pishro-Nik, 2016).

Tanım 1.4.1.3. (Gauss Süreci) Sonlu boyutlu dağılımları normal dağılım olan $X(\omega, t)$ sürecine Gauss süreci denir (Aliyev, 2010).

Gauss sürecinin karakteristik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \varphi_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) &= E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k X(t_k) \right\} \\ &= \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k E(X(t_k)) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_X(t_i, t_j) u_i u_j \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir, burada

$$K_X(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) - E(X(\omega, t_1))E(X(\omega, t_2))$$

elde edilmektedir.

Tanım 1.4.1.4. (Poisson Süreci) $N(t) \equiv N(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$ doğal sayılar kümesinden değer alabilen bir stokastik süreç olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $N(t)$ sürecine Poisson süreci denir (Aliyev, 2010).

i. $N(0) = 0$

ii. $N(t)$ 'nin artışları bağımsızdır. Yani $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$ için $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ artışları bağımsızdır.

iii. $\forall s < t$ için $N(t) - N(s)$ artışı $\lambda(t - s)$ beklenen değerine sahip olan Poisson dağılımına sahiptir:

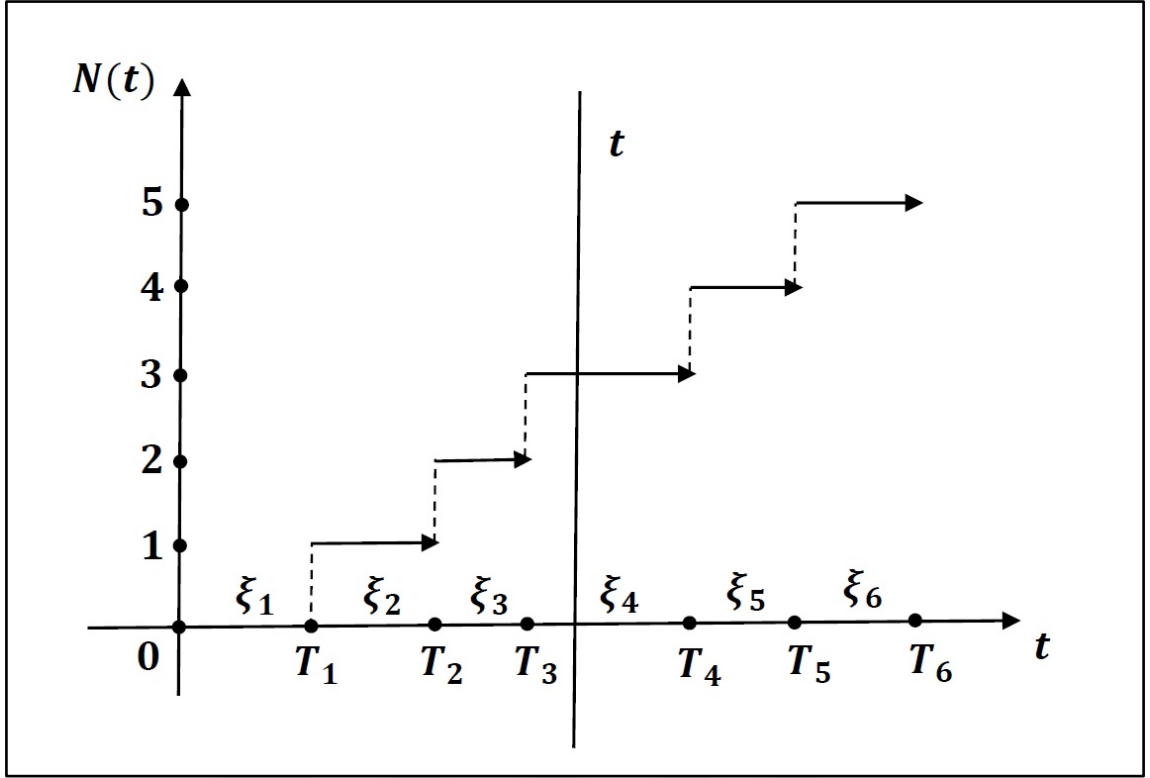
$$P\{N(t) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda(t - s))^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}, \lambda > 0.$$

Poisson sürecinin her realizasyonu bir basamak fonksiyonudur. Ayrıca her bir basamak yüksekliği 1'e eşittir.

T_n ile Poisson sürecinin sürecinin n . basamak anı, ξ_n ile $(n - 1)$. ve n . basamaklar arasında geçen zaman gösterilsin. T_n ve ξ_n rastgele değişkenlerdir ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\xi_n = T_n - T_{n-1}, T_0 = 0, T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, n \geq 1.$$

Poisson sürecinin grafiğini aşağıdaki gibi vermek mümkündür (Şekil 2).



Şekil 2. Poisson sürecinin bir realizasyonu

ξ_i 'lerin dağılımı üsteldir. ($\xi_i \sim \text{üstel}(\lambda)$)

ξ_i 'ler keyfi dağılıma sahipse yenileme süreci olarak adlandırılır.

Adımlar keyfi ise, ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılır.

$N(t)$, $[0, t]$ aralığındaki basamak sayısını gösterir. t sabit tutulduğunda, yani mesela $t \in [T_4, T_5)$ olduğunda $N(t) = 4$ olur. Buna göre

$$N(t) = \max\{n: T_n \leq t\}$$

olur.

Poisson sürecinin sonlu boyutlu dağılımları (n boyutlu) $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$, $n = 1, 2, \dots$ için

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_n}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} e^{-\lambda t_n}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.1.5. (Wiener Süreci) Bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında $\omega \in \Omega$, $t \geq 0$ olmak üzere $W(t) = W(\omega, t)$ süreci

i. $W(0) = 0$

ii. $W(t)$ sürecinin artışları bağımsızdır, yani $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$ için

$$W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

artışları bağımsızdır.

iii. Her $0 < s < t$ için $W(t) - W(s)$ artışı $(0, t - s)$ parametrelili normal dağılıma sahiptir:

$$F_{t-s}(x) = P\{W(t) - W(s) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2(t-s)}\right\} du$$

koşullarını sağlıyorsa Wiener süreci olarak adlandırılır (Aliyev, 2010) (Şekil 3).

Wiener sürecinin her $0 < s < t$ için $W(t) - W(s)$ artışının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$P_{t-s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\}$$

şeklindedir. Wiener süreci hiçbir yerde türevli değildir ancak her yerde süreklidir.

Wiener sürecinin bir boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu $P_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ dir.

O halde Wiener sürecinin iki boyutlu dağılım fonksiyonu

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} F_{t_2-t_1}(x_2 - v) P_{t_1}(v) dv$$

olur ve iki boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$P_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(t_2 - t_1)t_1}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \frac{x_1^2}{t_1}\right)\right\}$$

şeklinde elde edilir.

Buradan, Wiener sürecinin n boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu

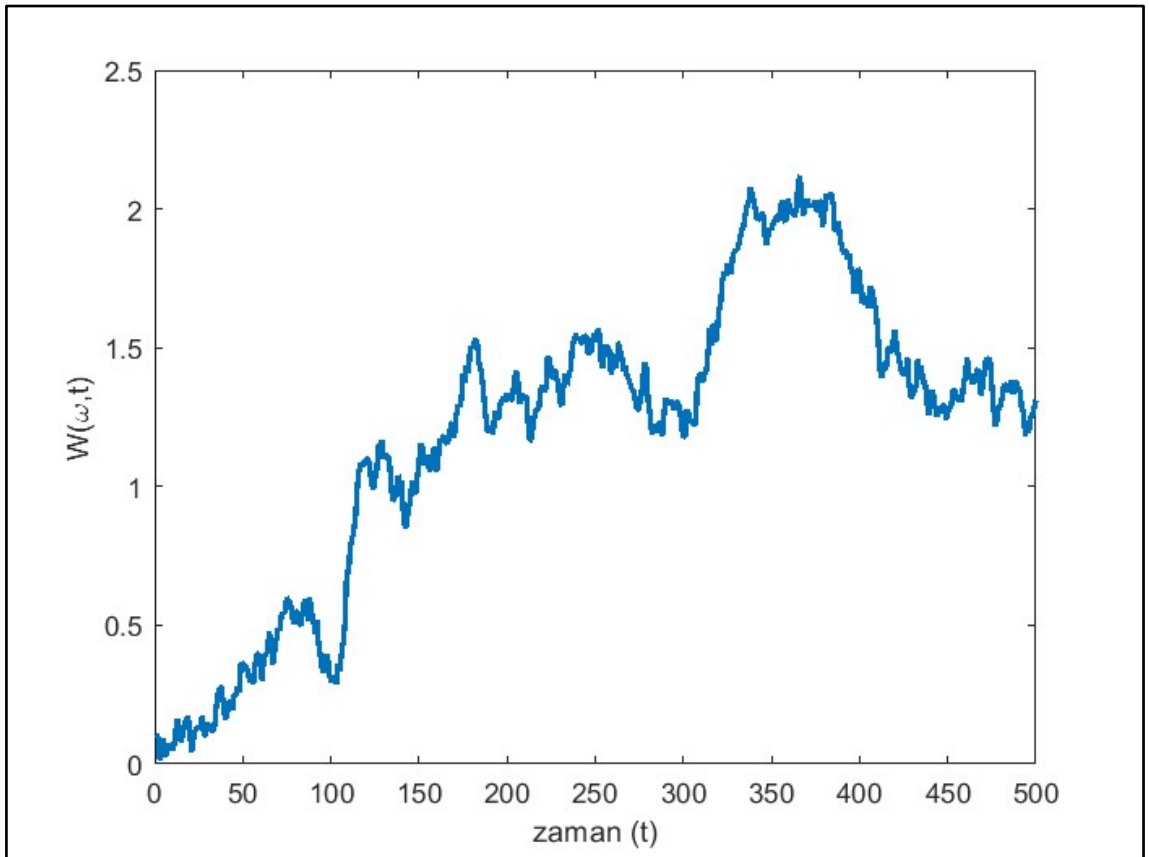
$$P_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n(t_k - t_{k-1})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \right\}$$

şeklindedir.

Wiener sürecinin beklenen değeri: $E(W(t)) = 0$ [$t_n - t_{n-1} \sim N(0, (t_n - t_{n-1}))$],

Wiener sürecinin varyansı: $Var(W(t)) = t$,

Wiener sürecinin kovaryans fonksiyonu ($\forall t_1, t_2 \geq 0$ için): $K(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\}$.



Şekil 3. Wiener sürecinin bir realizasyonu

1.5. Stokastik Diferansiyel Denklemler

Eğer bir diferansiyel denklemin katsayılarının bazılarında rastgele yapıya yer açılırsa, genellikle incelenmekte olan durumun daha gerçekçi bir matematiksel modeli elde edilebilmektedir. Örneğin

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), N(0) = N_0 \text{ (sabit)} \quad (1)$$

şeklinde verilen basit nüfus artış modeli ele alınsın. Burada $N(t)$ ile t anında nüfusun büyüklüğü ve $a(t)$ ile t anında relatif büyüme oranı gösterilsin. $a(t)$ katsayısının tam olarak bilinemediği, yani bazı çevresel rastgele etkilere maruz kaldığı bir durumla karşılaşılabilir. Dolayısıyla bu durumda

$$a(t) = r(t) + "gürültü"$$

şeklinde yazılması mümkündür. Burada gürültü teriminin davranışının tam olarak bilinmemesi, yalnızca olasılık dağılımının bilinmesi mümkündür. $r(t)$ teriminin ise rastgele olmadığı varsayılmaktadır.

Daha genel durumda, bir diferansiyel denklemin katsayılarında rastgele yapıya müsaade edilmesi ile elde edilen denklemler stokastik diferansiyel denklemler olarak adlandırılabilir (Oksendal, 2013). Açık şekilde görülür ki, bir stokastik diferansiyel denklemin herhangi bir çözümü rastgele bir yapı içermektedir, yani çözümün olasılık dağılımı ile ilgili bir şeyler söylenebilmesi amaçlanır. 1940'lara kadar stokastik diferansiyel denklemler daha içgüdüsel ve yetersiz bir şekilde ele alınmıştır. Bu tarihlerde Japon matematikçi Kiyosi Itô tarafından stokastik analizin (stochastic calculus) sunulması ile stokastik diferansiyel denklemler için matematiksel olarak anlamlı bir formülasyon geliştirilebilmiştir. Gözlemlenen Brown hareketi için 1900'lerde Einstein tarafından yapılan açıklamadan sonra, Langevin, Smoluchovsky ve diğerleri tarafından bu hareketin dinamiklerinin diferansiyel denklemler kullanılarak modellenmesine yönelik girişimlerde bulunulmuştur. Bu çalışmalarda

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x)$$

şeklindeki deterministik adi diferansiyel denklem yerine

$$\frac{d}{dt}X_t = a(t, X_t) + b(t, X_t)\xi_t$$

formunda gürültülü bir diferansiyel denklem elde edilmiştir. Bu denklemde $a(t, X_t)$

şeklindeki deterministik parça $b(t, X_t)\xi_t$ şeklindeki gürültü terimi ile pertürbe edilmektedir ve burada ξ_t her t için standart Normal rastgele değişken iken $b(t, x)$ genel durumda hem t hem de x değişkenine bağlı olabilen yoğunluk çarpanıdır. “Gauss beyaz gürültüsü” olarak bilinen ξ_t stokastik sürecinin özelliklerinden dolayı, stokastik diferansiyel denklemde

$$\xi_t(\omega) = \frac{d}{dt}W_t(\omega)$$

şeklinde de ifade edilebileceği gibi Wiener süreci veya Brown hareketinin türevi olması özelliklerinden faydalanılarak Wiener süreci kullanılır (Cyganowski vd., 2001). Bu durumda stokastik diferansiyel denklem

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

şeklinde ifade edilebileceği gibi

$$X_t(\omega) = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t a(s, X_s(\omega))ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s(\omega))dW_s(\omega)$$

şeklinde integral denklem olarak da ifade edilebilir. Burada ikinci integral bir Riemann-Stieltjes integrali olamaz çünkü bir Wiener sürecinin gerçekleştirmeleri herhangi sınırlı zaman aralığında sınırlı varyasyona sahip değildir. Burada deterministik integrasyon yerine Ito stokastik integrali kullanılmaktadır.

1.6. Stokastik Diferansiyel Denklemler için Sayısal Yöntemler

Aşağıdaki gibi verilen

$$\frac{dx}{dt} = a(t, x)$$

diferansiyel denklemi için en basit sayısal yöntem $t_{n+1} - t_n = \Delta > 0$ sabit adım boyuna sahip Euler yöntemidir. Bu yöntem

$$x_{n+1} = x_n + a(t_n, x_n)\Delta, n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde ifade edilir. Deterministik analiz stokastik analizden çok daha güçlüdür çünkü bir Riemann integraline yaklaşan bir Riemann toplamının integrandı ayrıklaştırma alt aralığının herhangi bir keyfi noktasında hesaplanabilirken, Ito stokastik integralinde her zaman aralığın alt ucunda hesaplanmalıdır. Bu durumun sonucunda Ito stokastik diferansiyel denklemleri için sayısal yöntemler türetmede Ito analizi ile tutarlılığın sağlanması için ekstra özen gösterilmelidir. Bir

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

skaler Ito stokastik diferansiyel denklemi için Euler yönteminin stokastik karşılığı

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)\Delta_n + b(t_n, X_n)\Delta W_n$$

şeklinde verilir. Burada

$$\Delta_n = t_{n+1} - t_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ds,$$

ve

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_s$$

şeklinde dir. Bu yöntem Ito stokastik analizi ile uyumludur; çünkü Euler yöntemindeki gürültü terimi stokastik diferansiyel denklemin integral halindeki Ito stokastik integraline ayrıklaştırma alt aralığı $[t_n, t_{n+1}]$ üzerinde integrandı bu aralığın alt sınırında hesaplayarak yaklaşır, yani

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s, X_s)dW_s \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(t_n, X_{t_n})dW_s = b(t_n, X(t_n)) \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_s.$$

Yukarıda verilen skaler Ito stokastik diferansiyel denkleminin stokastik Taylor açılımından bir terim daha stokastik Euler formülüne eklenirse, stokastik Milstein yöntemi elde edilir:

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)\Delta_n + b(t_n, X_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}b(t_n, X_{t_n})\frac{\partial b}{\partial x}(t_n, X_n)\{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\}.$$

1.7. Literatür Özeti

Modelleme kelimesi Latince'deki “modellus” kelimesinden türemiştir ve kabaca insanın gerçeklikle ilgilenmesinin yöntemlerini ifade etmektedir (Schichl, 2004). Matematiksel modelleme insanlığın güncel hayatta karşılaştığı problemlerin matematiksel araçlar kullanılarak incelenmeye başladığı ilk çağlardan itibaren günümüze kadar devam eden bir çalışma alanını temsil etmektedir. Antik dönemlerde Babil ve Mısır gibi bazı uygarlıkların gündelik problemlerle ilgili ilkel matematiksel modelleme çalışmaları yürüttükleri bilinmektedir. Özellikle Antik Yunan uygarlığında Thales gibi matematikçilerin güneş tutulmasının tarihini tahmin etmek gibi bazı gerçek hayat problemleri ile ilişkili yaptıkları incelemeler ile bu alandaki çalışmalar hız kazanmıştır (Schichl, 2004). Tarih boyunca yaşanan bilimsel gelişmelere paralel olarak matematiksel modellemenin de önemi artmış ve modelleme günümüzde mühendislik, tıp, sosyal bilimler ve temel bilimler alanlarında vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir. Bugün, sosyal bilimlerde tüketici davranışlarının matematiksel modelleme ile incelenmesinden bilgisayar bilimlerinde bilgisayar ağlarının etkileşimlerinin modellenmesine kadar çok farklı amaçlar için farklı yapıdaki modellerin kullanıldığı görülmektedir. Matematiksel modellerin yaygın olarak kullanıldığı bir başka alan ise tıp biliminde salgın hastalıklar ile ilgilenen epidemiyoloji alanıdır. Salgın hastalıkların bir topluluk içindeki yayılımı, toplulukta ulaşacağı en üst seviyenin belirlenmesi ve hastalığın toplulukta yok olması gibi problemleri inceleyen matematiksel modeller, özellikle dünya çapında yaşanan pandemi döneminde daha da önemli bir hal almıştır.

Salgın hastalıklar ile ilgili matematiksel modelleme çalışmalarının ilk örneklerinden birisi olarak İsviçreli matematikçi Daniel Bernoulli'nin çiçek hastalığı ve ölüm oranlarını kullanarak aşının faydalarını göstermek için yaptığı 1760 tarihli çalışması gösterilebilir. Özellikle hastalıkların toplumdaki etkilerinin bazı istatistikler aracılığı ile ifade edilmesini temel alan çalışmalar bakteriyolojinin gelişmesi ve hastalıkların yayılımının bilimsel olarak açıklanabilmesinin ardından 19. yüzyıl sonlarında hız kazanmıştır (Bekiryazıcı, 2017). İngiliz doktor Ronald Ross'un kendisine 1902 yılında Nobel tıp ödülünü kazandıran sıtma ile ilgili çalışmaları bu alandaki gelişimi farklı bir boyuta taşımıştır. Ross'un 1915 yılında yayımlanan “Some a priori pathometric equations” başlıklı makalesi insanlarda sıtma görülme oranı ile

sivrisinek sayısı arasındaki ilişkiyi belirten bir model içermektedir (Ross, 1915). Hastalığın yayılımının hastalık etkenleri ile hasta olma ihtimali olanlar arasındaki ilişkiye bağlı olduğunu belirten ve günümüzde “Kütle etkisi kanunu (Law of mass action)” olarak bilinen bu prensibe dayanan bu çalışmalar daha sonradan gelecek olan çalışmaların önünü açmıştır.

Günümüzde salgın hastalıkların yayılımının modellenmesinde yaygın olarak kullanılan matematiksel modellerin temelini oluşturan kompartımanlı modellerin literatüre girişi ise 1927 yılında olmuştur. İskoç biyokimyacı William Ogilvy Kermack ve İskoç fizyolog Anderson Gray McKendrick tarafından sunulan SIR modeli hastalık yayılımının matematiksel olarak ifade edilmesi için kullanılacak üç adi diferansiyel denklemden oluşan bir diferansiyel denklem sisteminden oluşmaktadır. Toplumdaki tüm bireylerin üç kompartımana ayrılması ve bu kompartımanlar arasındaki geçişlerin incelenerek hastalığın seyrinin modellenmesi prensibine dayanan SIR modeli 1927 yılında literatüre girmesi ile salgın hastalıklar üzerine yapılan çalışmaların seyrini değiştirmiştir (Kermack ve McKendrick, 1927). SIR modelinin denklemlerine hastalığın farklı bileşenlerini temsil eden yeni parametreler eklenmesi veya toplumdaki insanları farklı özelliklerine göre daha fazla gruba ayırarak yayılımın incelenmesi temeline dayanan farklı versiyonları literatürde sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin aşılanmış insanların farklı bir kompartıman içinde gruplandığı ($V \sim$ “vaccinated” kompartımanı) ve virüse maruz kalmış ancak henüz hastalanmamış insanların farklı bir kompartıman içinde gruplandığı ($E \sim$ “exposed” kompartımanı) SVEIR modeli bu versiyonlardan sadece biridir. SIR modeli ve varyantlarının literatürdeki kullanımları özellikle 20. yüzyılın sonlarında HIV virüsü hastalığı, Kolera, Kuş gribi ve Ebola gibi hastalıkların incelenmesinde etkin olarak kullanılmışlardır.

SIR modeli ve varyantlarının literatürde kullanımları ile ilgili aşağıdaki örnekler verilebilmektedir. Aşılanmış bireylerin de incelenmeye dahil edildiği SVEIR tipli kompartımanlı modelle ilgili olarak Gumel vd. tarafından 2006 yılında yapılan ve SARS hastalığına karşılık geliştirilen bir aşının hastalık yayılımına etkilerinin araştırıldığı bir çalışma örnek gösterilebilir (Gumel vd., 2006). SVEIR tipli bir kompartımanlı model içeren bir diğer çalışmada 2017 yılında Nkamba vd. tarafından Çocuk Felci hastalığına karşı geliştirilmiş bir aşının etkilerini inceleyen bir model

kullanılmaktadır (Nkamba vd., 2017). Kuddus vd. tarafından 2021 yılında yapılan bir çalışmada Kızamık hastalığının Bangladeş'te yayılımına iki doz aşının etkileri bir SVEIR tipli kompartımanlı model ile incelenmiştir (Kuddus vd., 2021). Doğuştan hastalığa karşı bağışıklığı olan bireylerin incelendiği M kompartımanı kullanılarak oluşturulan MSEIR tipli modellere örnek olarak Bolarin tarafından 2010 yılında yapılan Kızamık hastalığı ile ilgili çalışma gösterilebilir (Bolarin, 2010). Benzer bir çalışma Danhaus vd. tarafından doğuştan Tüberküloz hastalığına bağışıklığı olan bebeklerin durumunu göz önüne alacak şekilde yapılmıştır (Danhaus vd., 2021). Meester vd. tarafından 2021 yılında yapılan bir çalışma ise Hepatit E virüsünün bazı hayvan popülasyonlarında yayılımını incelemek için MSEIR tipli model kullanılmıştır (Meester vd., 2021). Virüse maruz kaldığı veya hasta olduğu halde herhangi bir hastalık belirtisi göstermeyen (asemptomatik) bireylerin gruplandığı A kompartımanının SEIR tipli modele eklenmesiyle de farklı modellerin elde edildiği görülmektedir. Zhao vd. tarafından 2020 yılında yapılan bir çalışma yeni koronavirüs (SARS-CoV-2) hastalığının incelenmesi için asemptomatik bireyleri de analiz eden bir SEIAR tipli model içermektedir (Zhao vd., 2021). Shil vd. tarafından 2011 yılında yapılan bir diğer çalışmada H1N1 virüsünün neden olduğu hastalık için SEIAR modelini içeren bir modelleme çalışması yapılmıştır (Shil vd., 2011). Kim vd. tarafından 2016 yılında yapılan bir çalışma grip hastalığının yayılımında aşının etkilerini incelerken SEIAR tipli bir model kullanılmaktadır (Kim vd., 2016). SEIR modelinin varyantlarından biri de karantinadaki bireylerin Q kompartımanı ile modele dahil edilerek incelendiği SEQIR tipli modellerdir. Adawale vd. tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada Difteri hastalığının yayılımı SEQIR tipli bir model kullanılarak incelenmiştir (Adawale vd., 2017). Das vd. tarafından 2021 yılında yapılan bir çalışmada yeni koronavirüs hastalığının yayılımı için SEQIR tipli bir model kullanılmıştır (Das vd., 2021). Özellikle Q kompartımanı aracılığı ile karantinadaki bireylerin modele dahil edildiği sistemler son zamanlarda salgın hastalıkların yayılımında daha fazla kullanılmaya başlamıştır. Dolayısıyla 2019 yılında Çin'de başlayan pandemi ile ilgili yapılan modelleme çalışmalarında en çok kullanılan model tiplerinde biri de SEQIR tipli modellerdir.

SIR ve varyantları aracılığı ile yapılan modelleme çalışmalarının büyük bir ölçüde deterministik sistemler üzerinden yapıldığı görülmektedir. Bu modeller

hastalık yayılımının rastgele doğasını göz ardı etmekte ve hastalık yayılımı ile ilgili bileşenlerin rastgele davranışlarını çalışmada kullanmamaktadırlar. Ancak özellikle salgın hastalıkların yayılımını modelleyen denklem sistemlerinde bu hastalıkların çeşitli özelliklerini temsil eden denklem parametrelerinin rastgele çokluklar olarak kullanılması hastalıkların gerçek hayattaki olası değişken davranışını modellemede daha etkin bir inceleme imkânı sağlayacaktır. Bu aşamada deterministik denklemlere rastgele bileşenler ekleme ile ilgili iki yöntem ön plana çıkmaktadır. Bunların ilki deterministik sayısal incelemelerde sabit değerler olarak kabul edilen parametrelerin rastgele değişkenler olarak ele alınmasıyla oluşturulan rastgele diferansiyel denklem sistemleri iken ikincisi deterministik denklemlere stokastik gürültü terimleri eklenmesiyle oluşan stokastik diferansiyel denklemlerdir. Rastgele diferansiyel denklem sistemleri ile ilgili literatür genel anlamda son yıllarda çeşitli hastalıklarla ilgili yapılan yaklaşık ve sayısal çözüm incelemelerinden oluşmaktadır. Bekiryazici vd. tarafından 2016 yılında yapılan bir çalışmada Dang Humması hastalığı ile ilgili sayısal çözüm ve simülasyon içeren bir çalışma yapılmıştır (Bekiryazici vd., 2016). Merdan vd. tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada Hepatit C hastalığının yayılımı ile ilgili üç kompartımanlı bir model üzerinde kararlılık analizi ve rastgele simülasyon çalışması yapılmıştır (Merdan vd., 2017). Merdan vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada Ebola hastalığının yayılımı ile ilgili bir model üzerinde yaklaşık analitik çözüm incelemesi yapılmıştır (Merdan vd., 2018). Bekiryazici vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada SVEIR tipli bir model kullanılarak Çocuk Felci hastalığı ile ilgili bir inceleme yapılmıştır (Bekiryazici vd., 2018). Bekiryazici vd. tarafından 2021 yılında yapılan bir çalışmada Hepatit B hastalığı ile ilgili SIIR tipli bir model kullanılarak rastgele bir inceleme yapılmıştır (Bekiryazici vd., 2021).

Rastgele diferansiyel denklem sistemleri ile ilgili literatür kısıtlı bir genişlikte olmasına rağmen stokastik çalışmalar üzerine kapsamlı bir literatür olduğu görülmektedir. Bunun temel nedeni stokastik analizin daha kapsamlı inceleme yapmaya olanak sağlaması olarak gösterilebilir. Wang vd., 2018 yılında yaptıkları çalışmada SIS tipli kompartımanlı modelin stokastik hali ile ilgili bir inceleme yapmışlardır (Wang vd., 2018). Miao vd. 2018 yılında yaptıkları çalışmada SIR modelinin Brown hareketi kullanılarak elde edilen stokastik halinin hastalıkların yatay

ve dikey bulaşması üzerine uygulamasını vermişlerdir (Miao vd., 2018). Arif vd. 2019 yılında yaptıkları çalışmada tifo hastalığı yayılımı için dört kompartımanlı bir stokastik model üzerinde sayısal inceleme yapmışlardır (Arif vd., 2019b). Song vd. 2018 yılında yaptıkları çalışmada stokastik SIRS tipli kompartımanlı modelin çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili inceleme yapmışlardır (Song vd., 2018). Raza vd. 2019 yılında yaptıkları çalışmada yedi kompartımanlı bir stokastik model kullanarak Dang Humması hastalığının yayılımını incelemişlerdir (Raza vd., 2019). Arif vd. 2019 yılında yaptıkları çalışmada altı kompartımanlı bir stokastik model ile Hepatit B hastalığının yayılımı ile ilgili sayısal inceleme yapmışlardır (Arif vd., 2019a). Mummert ve Otunuga 2019 yılında yaptıkları çalışmada stokastik SEIRS tipli kompartımanlı modelin Grip hastalığının yayılımı üzerine uygulamasını vermiş ve parametre tahmini incelemesinde bulunmuşlardır (Mummert ve Otunuga, 2019). Feng ve Qiu 2019 yılında yaptıkları çalışmada Tüberküloz hastalığının yayılımı için bir stokastik model kullanmışlardır (Feng ve Qiu, 2019). Literatürdeki stokastik çalışmaların özel hastalıkların yayılımı ile ilgili sayısal incelemelerinin yanı sıra bazı kompartımanlı modellerin genel davranışları için yapılan teorik çalışmaları da içerdiği görülmektedir.

Bu tez çalışması ile literatürde yapılmış olan stokastik koronavirüs yayılımı modelleme çalışmalarına bir yenisi eklenecektir. Tez çalışmaları kapsamında halihazırda var olan bir deterministik denklem sistemi stokastik gürültü kullanılarak stokastik hale getirilecek ve bu şekilde hastalığın yayılımı için kullanılan deterministik ve stokastik modeller arasındaki farklar-benzerlikler incelenecektir. Stokastik modelin farklı parametre değerleri ve yöntemlerle kapsamlı bir şekilde ele alınması sonucunda literatürde yoğunlukla deterministik modeller kullanılarak incelenen koronavirüs yayılımında stokastik bileşenler kullanımının sağladığı avantajların öne çıkarılması hedeflenmektedir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak olan deterministik model ile ilgili hastalık tanıtılacak ve stokastik model kurulumu ile ilgili çalışmalar sunulacaktır.

2.1. COVID-19 Hastalığı

Koronavirüsler (CoV), Orta Doğu Solunum Sendromu (MERS-CoV) ve Ağır Akut Solunum Sendromu (Severe Acute Respiratory Syndrome, SARS-CoV) gibi ciddi ve daha farklı hastalıklara neden olan geniş bir virüs ailesidir. Koronavirüsler insanlarda bulunur, virüslerin insanların birbirine bulaştırdığı ve çoğunlukla soğuk algınlığına neden olan farklı alt tipleri de (HCoV-229E, HCoV-OC43, HCoV-NL63 ve HKU1-CoV) vardır. Ayrıca birçok farklı koronavirüs alt türü hayvanlarda da bulunmakta olup hayvanlardan insana taşınarak ağır hastalıklara sebep olduğu görülmüştür. SARS-CoV vakası ilk olarak 2003 yılında görülüp daha önceden bilinmeyen bir virüs olduğu ve birçok kişinin ölümüne sebebiyet verdiği ortaya çıkmıştır (URL-1).

31 Aralık 2019 tarihinde, Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ) tarafından Çin'in Hubei eyaletinin Vuhan şehrinde tedavi edilemeyen zatürre benzeri semptomlar gösteren vakalar bildirilmiştir. Bu virüs daha önceki bilinen koronavirüslerden farklı olduğu için SARS-CoV-2 olarak isimlendirilmiş ve bu virüsün sebebiyet verdiği hastalığın adı ise COVID-19 olarak adlandırılmıştır. COVID-19 vakaları Çin'de görülmeye başladıktan kısa bir süre sonra tüm dünyayı etkisi altına almıştır (İşsever vd., 2020). COVID-19 salgını Dünya Sağlık Örgütü tarafından 12 Mart 2020 tarihi itibarıyla pandemi olarak ilan edilmiştir.

Çalışmalar sonucunda hastalığın damlacık veya temas yolu ile insandan insana bulaştığı görülmüştür. Ayrıca, kuluçka ortalama süresi 4-5 gün (0-14 gün) olarak gösterilmiştir. COVID-19 belirtileri genellikle değişken olup en yaygın belirtileri ateş, kuru öksürük, yorgunluk, nefes darlığı, koku alma ve tat alma duyularında kayıp yaşanmaktadır. COVID-19 virüsü enfekte bir kişinin başkasıyla yakın teması sonucunda bulaşmakta olup enfekte kişinin konuşması, hapşırması, öksürmesi gibi sebeplerle ağız, burun veya göze temasıyla yayılmaktadır. Enfekte birinin hastalık belirtisi göstermeden 2 gün önce bile başkalarına bulaştırması mümkündür. Teşhis için

ağızdan ve burundan sürüntü yöntemi ile alınan örnek incelenerek tespit edilir. Alınan örneklerin sonuçları birkaç saat ile 2 gün içerisinde çıkmaktadır. Bilim insanları, hastalığa neden olan virüs soyunu izole etmiş ve genetik yapısını yayımlayarak dünya çapında laboratuvarların enfeksiyonu teşhis etmeleri için PCR testleri geliştirmesine olanak tanımıştır. Ayrıca daha hızlı sonuç veren testler için çalışmalar yapılmaktadır. COVID-19 virüsünden korunmak için maske, sosyal mesafe, el temizliği, yüze temasın az olması, öksüme ve hapşırma durumlarında ağzın kapatılması ve karantina gibi önleyici tedbirler alınmaktadır (URL-2). Hastalık ileri yaş ve kronik hastalığı olan kişilerde şiddetli seyredebilir veya ölümle sonuçlanabilmektedir. Ölüm oranı erkeklerde daha fazla olduğu gözlenmiştir ve bu ölüm oranı dünya genelinde %2-3 olarak değişiklik göstermektedir (Dikmen vd., 2020).

COVID-19 ilk olarak Çin'in Wuhan şehrinde görüldükten sonra virüsün hızlı bir şekilde yayılmasını engellemek için şehir 23 Ocak 2020'de karantinaya almıştır. Bu sebeple diğer ülkelere uçak seyahatleri durdurulmuştur. Türkiye ve diğer pek çok ülke buradan vatandaşlarını tahliye etmiş ve onları karantinaya alıp virüsün yayılmasını engellemeye çalışmışlardır (URL-2). COVID-19 virüsü Çin'de görülmeye başladıktan sonra en fazla görüldüğü ülke İtalya olmuştur. İtalya'da kademeli olarak önlemler artırılmaya başlamıştır. Bu önlemler kapsamında bazı bölgelerde giriş çıkışlar yasaklanıp, bazı etkinlikler ve spor müsabakaları ertelenerek karantina önlemlerini tüm ülkeye yayılmıştır. İtalya gibi İran da virüsün hızla yayıldığı ülkeler arasında yer almıştır. İran 12 Mart 2020 tarihi itibarıyla hem vaka hem de ölüm sayısı açısından dünyada üçüncü sırada yer almıştır. İran'ın ardından Güney Kore, Fransa, İspanya, Almanya, Japonya, ABD ve İngiltere'de vakaların hızla görülüp önlemlerin alındığı başlıca ülkeler olmuşlardır (URL-3).

COVID-19 vakasının DSÖ tarafından 04.04.2023 tarihi itibarıyla en çok vaka ve ölüm görülen başlıca ülkeler sıralaması şöyledir: ABD'de görülen kümülatif vaka sayısı 102 milyon 247 bin 392 olup, ölüm sayısı 1 milyon 117 bin 54'tür. Hindistan'da görülen kümülatif vaka sayısı 44 milyon 704 bin 147 olup, ölüm sayısı 530 bin 760 kişidir. Brezilya'da kümülatif vaka sayısı 36 milyon 987 bin 682 olup, ölüm sayısı 696 bin 742'dir. Birleşik Krallık'ta görülen kümülatif vaka sayısı 24 milyon 286 bin 411 olup, ölüm sayısı 210 bin 396 kişidir. Rusya Federasyonu'nda görülen kümülatif vaka sayısı 22 milyon 603 bin 646 olup, ölüm sayısı 397 bin 146 kişidir (URL-4).

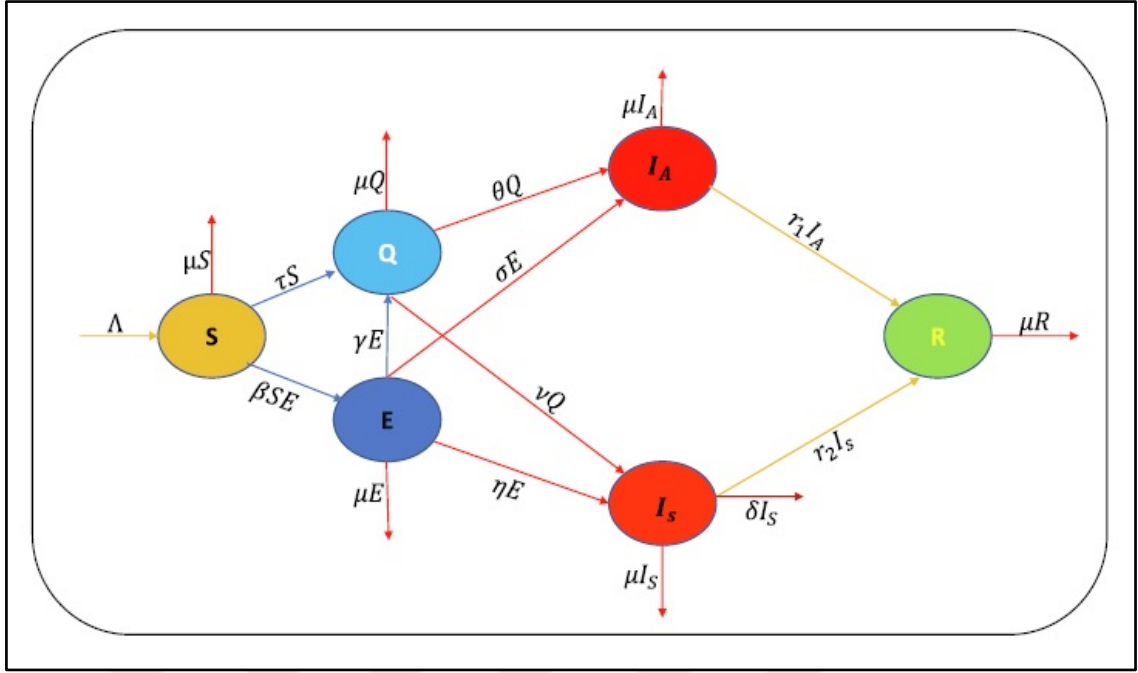
DSÖ verilerine göre; 04 Nisan 2023 itibariyle, dünya genelindeki COVID-19 kaynaklı onaylanmış vaka sayısının 761 milyon 402 bin 282'e ulaştığı, ölüm sayısının ise 6 milyon 887 bin olduğu görülmektedir (URL-4). Türkiye Cumhuriyeti Sağlık Bakanlığı verilerine göre Mart 2023 sonu itibariyle Türkiye genelindeki COVID-19 kaynaklı onaylanmış vaka sayısı 17 milyon 232 bin 66'ya ulaştığı, ölüm sayısının ise 102 bin 174 olduğu görülmektedir (URL-1).

SARS-CoV-2 (COVID-19) enfeksiyonu için aşı çalışmalarında büyük yol kat edilmiş olup, kesin tedavi edecek etkin bir ilaç ile ilgili çalışmalar devam etmektedir. Yapılan çalışmalar sonucunda geliştirilen bazı aşılar dünya çapında milyarlarca insana uygulanmıştır. Geliştirilen bazı aşılar Pfizer/Biontech, Moderna, AstraZeneca/Oxford, Sinovac Biontech isimleri ile bilinmektedir. Dünya Sağlık Örgütü verilerine göre; 27 Mart 2023 tarihi itibariyle toplam 13 milyar 317 milyon 121 bin 247 aşı dozu uygulanmıştır (URL-4). Türkiye Cumhuriyeti Sağlık Bakanlığı verilerine göre; 04 Nisan 2023 tarihi itibariyle 152 milyon 710 bin 103 doz aşı uygulanmıştır (URL-1).

Dünya Sağlık Örgütü geçtiğimiz günlerde COVID-19'un artık yerleşik ve devam eden bir sağlık sorunu olduğunu ve uluslararası öneme sahip bir halk sağlığı acil durumu teşkil etmediğini açıklamıştır (URL-5).

2.2. Deterministik Model

Bu çalışmada, COVID-19 pandemisinin yayılımının modellenmesi için 2021 yılında Ahmed vd. tarafından yayımlanan "A mathematical model of Coronavirus Disease (COVID-19) containing asymptomatic and symptomatic classes" başlıklı çalışmada sunulan deterministik adi diferansiyel denklem sistemi temel alınacaktır. Bu diferansiyel denklem sistemi, literatürde sıklıkla kullanılan SEIR modeline karantinadaki bireyleri içeren Q kompartmanının eklenmesi ve hastalık bulaşmış bireyleri içeren I kompartmanının semptomatik ve asemptomatik bireyleri içeren kompartmanlar I_A ve I_S olarak ikiye bölünmesiyle elde edilmiştir. Oluşan diferansiyel denklem sisteminin akış şeması kaynak çalışmada aşağıdaki gibi verilmektedir (Şekil 4) (Ahmed vd., 2021).



Şekil 4. COVID-19 yayılım şeması (Ahmed vd., 2021)

Bu akış şemasında hastalığın yayılımının parametreler kullanılarak nasıl deterministik adi diferansiyel denklem sistemine oturtulduğu görülmektedir. Akış şemasında S değişkeninden Q değişkenine τS oranında transfer olmaktadır. R değişkeninden μR oranında doğal ölüm gerçekleşmektedir. Parametreler, açıklamaları ve diferansiyel denklem sisteminin sayısal çözümünde kullanılacak olan deterministik sayısal değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 1).

Tablo 1. Parametrelerin açıklamaları ve sayısal değerleri

Par.	Açıklama	Sayısal Değer
τ	Hastalığa duyarlı bireylerden karantinaya transfer oranı	0.0002
β	Duyarlı kişiler ve maruz kalan kişiler arasındaki temas oranı	0.0805
δ	Semptomatik enfekte bireyde koronavirüse bağlı ölüm oranı	1.6728×10^{-5}
γ	Maruz kalan bireyin karantinaya transfer oranı	2.0138×10^{-4}
η	Maruz kalmış bireylerin semptomatik gruba transfer oranı	0.4478
θ	Karantinadan asemptomatik enfekte bireylere transfer oranı	0.0101
μ	Doğal ölüm oranı	0.0106
ν	Karantinadan semptomatik enfekte kişilere transfer oranı	3.2084×10^{-4}
σ	Maruz kalan bireylerin asemptomatik bireylere transfer oranı	0.0668
Λ	Katılım oranı	0.02537
r_1	Asemptomatik enfekte bireylerin iyileşme oranı	5.7341×10^{-5}
r_2	Semptomatik enfekte bireylerin iyileşme oranı	1.6728×10^{-5}

Bu parametrelerin sayısal değerleri günlük değişim oranını göstermektedir. τ parametresi hastalığa duyarlı bireyden karantinaya transferin bir günlük oranın 0.0002 olduğunu, β parametresinin ise duyarlı kişiler ve maruz kalan kişiler arasındaki temas oranının 0.0805 değerlerine sahip olduğunu belirtmektedir. Bu parametreler ve akış şeması kullanılarak kaynak çalışmada deterministik diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \Lambda - (\tau + \mu)S(t) - \beta S(t)E(t), \\
\frac{dE(t)}{dt} &= \beta S(t)E(t) - (\gamma + \mu + \eta + \sigma)E(t), \\
\frac{dQ(t)}{dt} &= \tau S(t) + \gamma E(t) - (\mu + \nu + \theta)Q(t), \\
\frac{dI_A(t)}{dt} &= \sigma E(t) + \theta Q(t) - (\mu + r_1)I_A(t), \\
\frac{dI_S(t)}{dt} &= \eta E(t) + \nu Q(t) - (\delta + \mu + r_2)I_S(t), \\
\frac{dR(t)}{dt} &= r_1 I_A(t) + r_2 I_S(t) - \mu R(t).
\end{aligned} \tag{2}$$

(2) diferansiyel denklem sisteminde $S(t)$ hastalığa duyarlı bireyleri, $E(t)$ hastalık bulaşmış ancak henüz hastalanmamış bireyleri, $Q(t)$ karantinadaki bireyleri, $I_A(t)$ asemptomatik yani hasta ve belirti göstermeyen bireyleri, $I_S(t)$ semptomatik yani hasta ve belirti gösteren bireyleri ve $R(t)$ ise hastalıktan iyileşmiş bireyleri göstermektedir. Bu diferansiyel denklem sisteminin sayısal incelenmesinde kullanılacak olan başlangıç değerleri ise kaynak çalışmada aşağıdaki gibi verilmektedir (Ahmed vd., 2021).

$$S(0) = 0.5, E(0) = 0.2, Q(0) = 0.1, I_A(0) = 0.2, I_S(0) = 0.1, R(0) = 0. \tag{3}$$

Burada verilen başlangıç değerlerine göre popülasyonda $t = 0$ anında hastalığa duyarlı bireyler 0.5, hastalık bulaşmış ancak henüz hastalanmamış bireyler 0.2, karantinadaki bireyler 0.1, asemptomatik yani hasta ve belirti göstermeyen 0.2, semptomatik yani hasta ve belirti gösteren bireyler 0.1, hastalıktan iyileşmiş bireyler

ise 0 olmaktadır. (2) ile verilen diferansiyel denklem sistemi, (3) başlangıç koşulları ile birlikte Şekil 1’de verilen akış şemasına uygun olarak COVID-19 pandemisinin toplum içindeki yayılımını modellemektedir.

2.3. Stokastik Model

(2) ile verilen deterministik diferansiyel denklem sistemi COVID-19 pandemisinin yayılımının deterministik davranışını modellemektedir. Bu model kullanılarak hastalığın yayılımının rastgele davranışlarını modellemek için iki yol izlenebilir. Bunlardan ilki modelde rastgele parametreler kullanarak rastgele diferansiyel denklem sistemi elde etmek iken ikincisi denklemlere stokastik gürültü terimleri eklenerek bir stokastik diferansiyel denklem sistemi elde edilmesidir. İkinci yol izlenirse

$$\begin{aligned}
dS_t &= (\Lambda - (\tau + \mu)S(t) - \beta S(t)E(t))dt + \alpha_1 S_t dW_{t_1}, \\
dE_t &= (\beta S(t)E(t) - (\gamma + \mu + \eta + \sigma)E(t))dt + \alpha_2 E_t dW_{t_2}, \\
dQ_t &= (\tau S(t) + \gamma E(t) - (\mu + \nu + \theta)Q(t))dt + \alpha_3 Q_t dW_{t_3}, \\
dI_{A_t} &= (\sigma E(t) + \theta Q(t) - (\mu + r_1)I_A(t))dt + \alpha_4 I_{A_t} dW_{t_4}, \\
dI_{S_t} &= (\eta E(t) + \nu Q(t) - (\delta + \mu + r_2)I_S(t))dt + \alpha_5 I_{S_t} dW_{t_5}, \\
dR_t &= (r_1 I_A(t) + r_2 I_S(t) - \mu R(t))dt + \alpha_6 R_t dW_{t_6}.
\end{aligned} \tag{4}$$

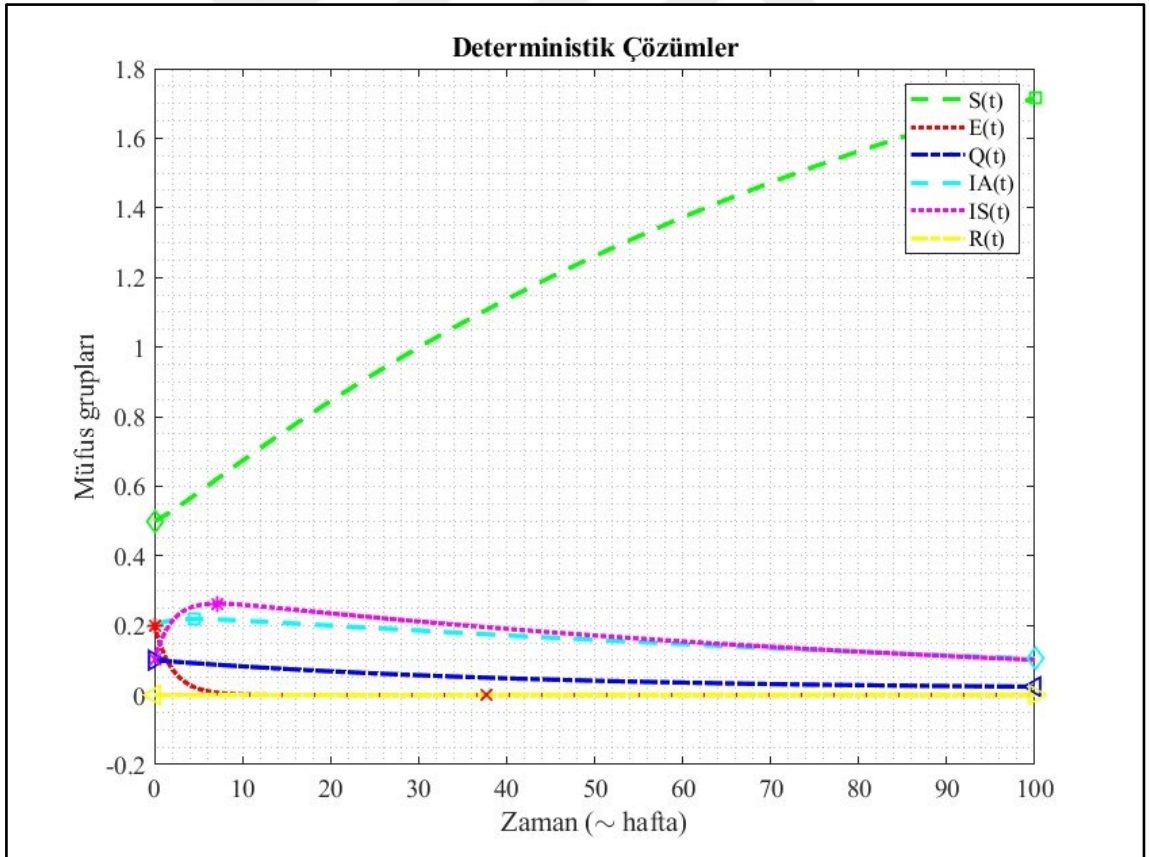
şeklindeki stokastik diferansiyel denklem sistemi elde edilmiş olur. Burada $\alpha_i, i = \overline{1,6}$ katsayıları stokastik diferansiyel denklemlerin difüzyon katsayılarının ölçeklendirici parçalarıdır ve değişkenler ile birlikte difüzyon katsayılarını oluşturmaktadırlar. Benzer şekilde $W_{t_i}, i = \overline{1,6}$ ile ise birbirlerinden bağımsız Wiener süreçleri gösterilmektedir. (4) stokastik diferansiyel denklem sisteminin başlangıç koşulları deterministik diferansiyel denklem sistemi (2) ile aynı şekilde verilecek (3) koşullarıdır. Bu başlangıç koşulları ile (4) stokastik diferansiyel denklem sistemi Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleri kullanılarak sayısal olarak çözülecek ve elde edilen $S_t, E_t, Q_t, I_{A_t}, I_{S_t}$ ve R_t stokastik süreçlerinin davranışları incelenerek COVID-19 pandemisinin yayılımının stokastik davranışları yorumlanacaktır. Bu model kullanılarak hastalık yayılımı ile ilgili rastgele realizasyonların ve beklenen değerlerin incelenebilmesine olanak sağlanacaktır.

3. BULGULAR

Bu kısımda COVID-19 hastalığının deterministik diferansiyel denklem sistemi olarak sayısal çözümleri ve bu denklem sistemine stokastik gürültü terimi eklenerek elde edilen stokastik diferansiyel denklem sisteminin sayısal çözümlerinin Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleriyle simülasyonları yapılmaktadır. Hastalığın rastgele etkiler altındaki davranışları yapılan simülasyonlarda elde edilen sonuçlar vasıtasıyla tahmin edilebilmektedir.

3.1. Deterministik Sonuçlar

Deterministik modelin sayısal çözümleri MATLAB (ode23s) kullanılarak elde edilmiştir. Çözümlerin stokastik süreçler ile uyumluluğu sonraki çalışmalarda yapılacaktır (Şekil 5).



Şekil 5. Deterministik çözümler

Deterministik çözümlerde elde edilen uç değerler bir sonraki bölümde stokastik sonuçlar ile ele alınacaktır. Kompartımanların çözüm eğrileri incelenerek deterministik modelin tasvir ettiği yayılım dinamikleri aşağıdaki gibi yorumlanabilir. $S(t)$ değeri sürekli artış göstermektedir. $E(t)$ değeri ilk haftalarda hızla düşerken sonraki haftalarda düşüş hızı azalmaktadır. $Q(t)$ değeri sürekli olarak düşüş göstermektedir. $I_A(t)$ değeri başlangıçta artış göstermekte olup ilerleyen haftalarda bu değerde düşüş olmaktadır. $I_S(t)$ değeri ilk 7 haftalık süreçte hızla yükselirken ilerleyen haftalarda düşmektedir. $R(t)$ değeri ilk haftalardan itibaren artmakta olup son haftalarda artış hızı azalmaktadır.

3.2. Stokastik Sonuçlar (Euler-Maruyama)

$SEQI_AI_S R$ tipli model için oluşturulan diferansiyel denklem sisteminde deterministik modelin yaklaşık çözümleri ile bu modele eklenen stokastik gürültü terimlerin oluşturmuş olduğu stokastik diferansiyel denklem sistemin beklenen yaklaşık çözümleri birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir. Yaklaşık çözümler ile beklenen değerler arasındaki ufak farklılıklar eklenen rastgelelik teriminin sonucunda ortaya çıkmaktadır şeklinde yorumlanabilir. Oluşturulan stokastik diferansiyel denklemi, Euler-Maruyama yöntemi kullanarak 100 haftalık süreçte incelendiğinde karşımıza çıkan sayısal çözümlerin beklenen maksimum ve minimum değerleri şöyledir.

$S(t)$ ile gösterilen hastalığa duyarlı bireylerin $t = 0$ anında 0.5000 minimum beklenen değerini alırken $t = 100$ anda 1.7141 maksimum beklenen değerini almaktadır. $S(t)$, 100 haftalık süreçte devamlı artış halindedir. Deterministik sonuç grafiğinde görüldüğü gibi stokastik sonuçlar ile örtüşmektedir. Deterministik uç noktaları minimum 0.5 ($t = 0$) iken, maksimum 1.7152 ($t = 100$) değerini alarak stokastik uç noktaları ile benzer sonuçlar elde edilmektedir (Şekil 6, Şekil 8).

$E(t)$ ile gösterilen hastalık bulaşmış ancak henüz hastalanmamış bireylerin $t = 100$ anında 0 minimum beklenen değerinde, $t = 0$ anında ise 0.2000 maksimum beklenen değerinde olduğu görülmektedir. $E(t)$, ilk haftalarda maksimum değerde olup sonraki birkaç haftada hızla azalarak minimum değerine yaklaşmıştır ve sürecin sonuna kadar bu değerde devam etmektedir. Deterministik sonuçlar ile stokastik sonuçlar grafiklerde görüldüğü gibi uyumlu çıkmaktadır. Deterministik uç nokta

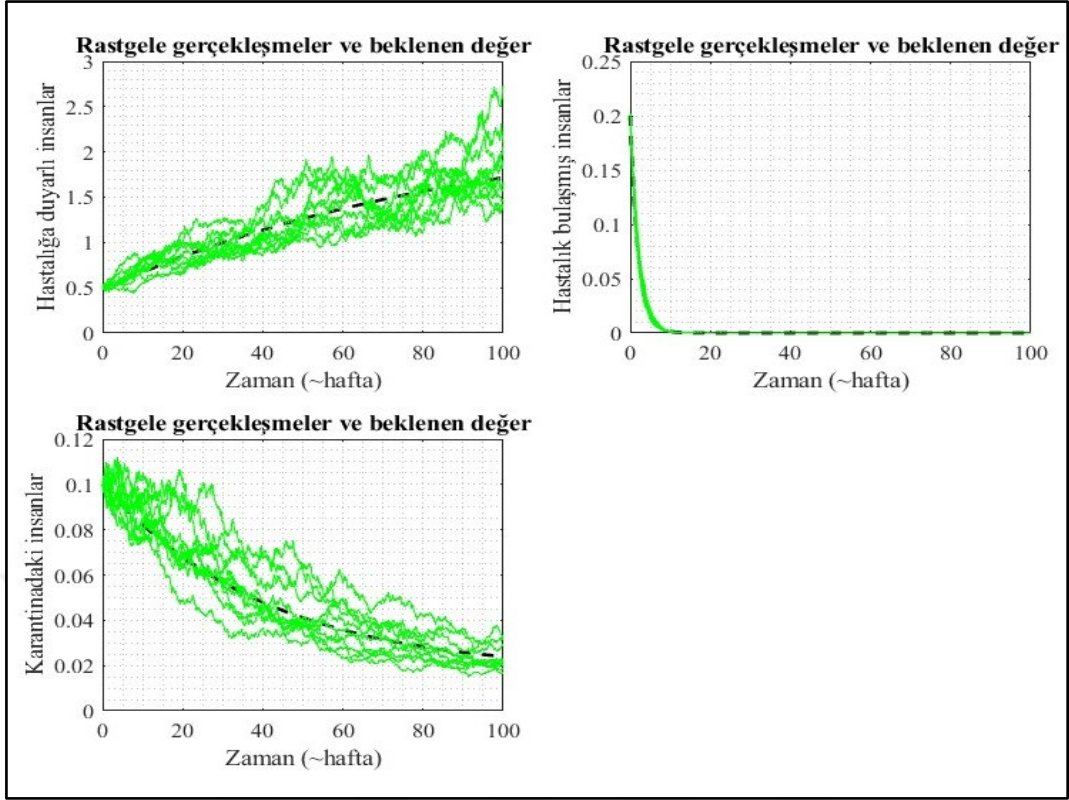
minimum 0 ($t = 37.7$) olurken, maksimum 0.2000 ($t = 0$) olup stokastik uç değerlerle uyumlu olduğu görülmektedir (Şekil 6, Şekil 8).

$Q(t)$ ile gösterilen karantinadaki bireylerin $t = 0$ anında 0.1000 maksimum beklenen değerinde olduğu, $t = 100$ anında ise 0.0239 minimum beklenen değeri aldığı görülmektedir. $Q(t)$, ilerleyen haftalarda sürekli düşerek minimum değere ulaşmaktadır. Deterministik sonuçlar ile stokastik sonuçlar grafiklerdeki gibi benzer sonuçlar verirken uyumlu oldukları gözlenmektedir. Deterministik uç noktalar minimum 0.0239 ($t = 100$) ve maksimum 0.1000 ($t = 0$) değerleri olup stokastik sonuçlarla benzerdir (Şekil 6, Şekil 8).

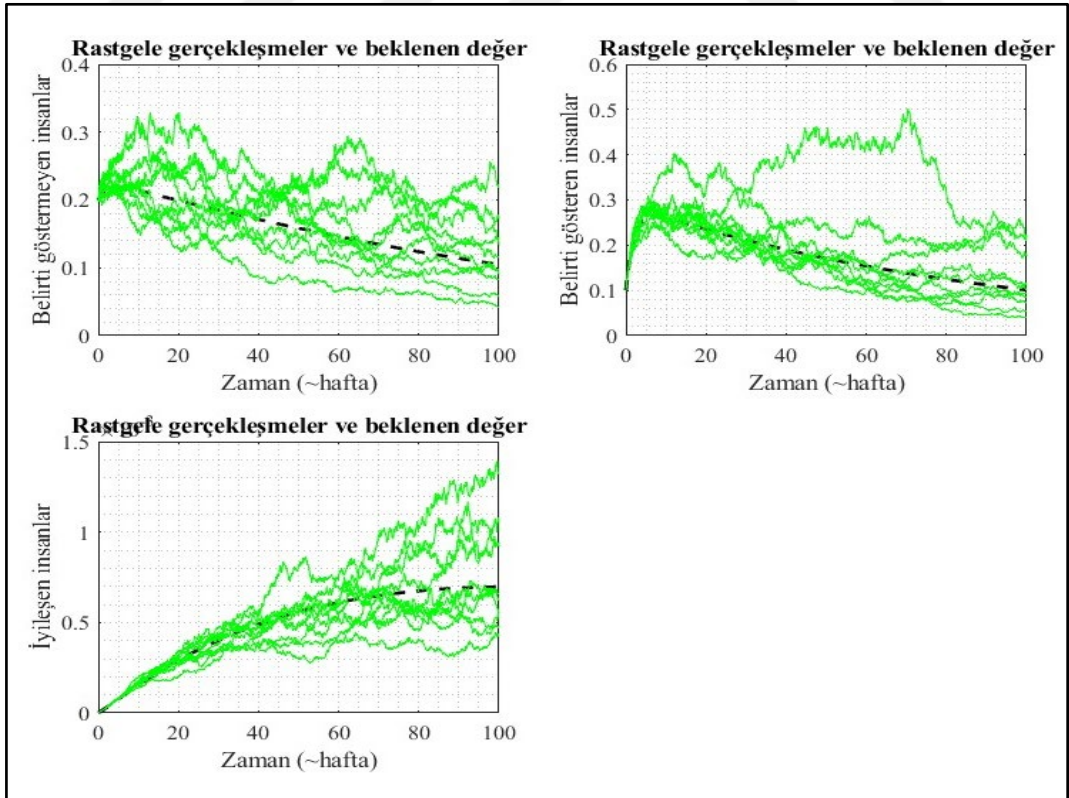
$I_A(t)$ ile gösterilen asemptomatik yani hasta ve belirti göstermeyen bireylerin $t = 4.8000$ anda 0.2190 maksimum beklenen değerine ulaştığı, $t = 100$ anda 0.1055 minimum beklenen değerinde olduğu görülmektedir. $I_A(t)$, ilk haftalarda yükselip maksimum değere ulaştıktan sonra ilerleyen haftalarda düşüşe geçmektedir. Deterministik ve stokastik sonuçlar grafiklerde görüldüğü gibi birbirleriyle örtüşmektedir. Deterministik uç değerleri minimum 0.1047 ($t = 100$), maksimum 0.2186 ($t = 4.600$) alırken stokastik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir (Şekil 7, Şekil 9).

$I_S(t)$ ile gösterilen semptomatik yani hasta ve belirti gösteren bireylerin $t = 0$ anında 0.1000 minimum beklenen değerinde olduğu, $t = 7.1000$ anında 0.2633 maksimum beklenen değerini aldığı görülmektedir. $I_S(t)$, ilk haftalarda minimum değerinde olup, sonraki yedi haftalık süreçte hızla yükselip maksimum değere ulaştıktan sonra ilerleyen haftalarda azalmaktadır. Deterministik uç değer ile stokastik uç değerler benzer sonuçlar vermektedir. Deterministik minimum değeri 0.1000 ($t = 0$) iken, maksimum değeri 0.2626 ($t = 7.200$) olmaktadır (Şekil 7, Şekil 9).

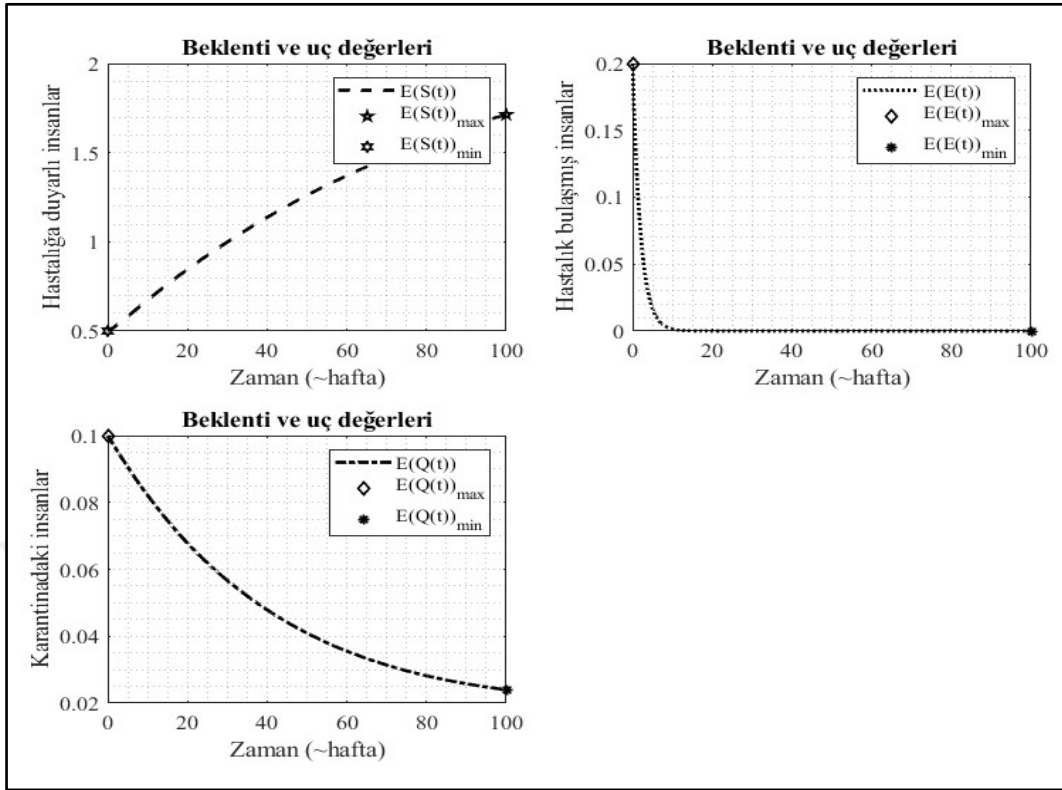
$R(t)$ ile gösterilen hastalıktan iyileşmiş bireylerin $t = 0$ anında 0 minimum beklenen değerinde olduğu, $t = 98.5000$ anda maksimum beklenen değere ulaştığı grafiklerden görülmektedir. $R(t)$, ilerleyen haftalarda artarak maksimum değere yaklaştığı, son haftalarda artış hızında azalma yaşandığı görülmektedir. Deterministik sonuçlar ve stokastik sonuçları grafiklerde görüldüğü gibi örtüşmektedir. Deterministik uç noktaları minimum 0 ($t = 0$) ve maksimum 0.0007 ($t = 100$) değerinde olmaktadır (Şekil 7, Şekil 9).



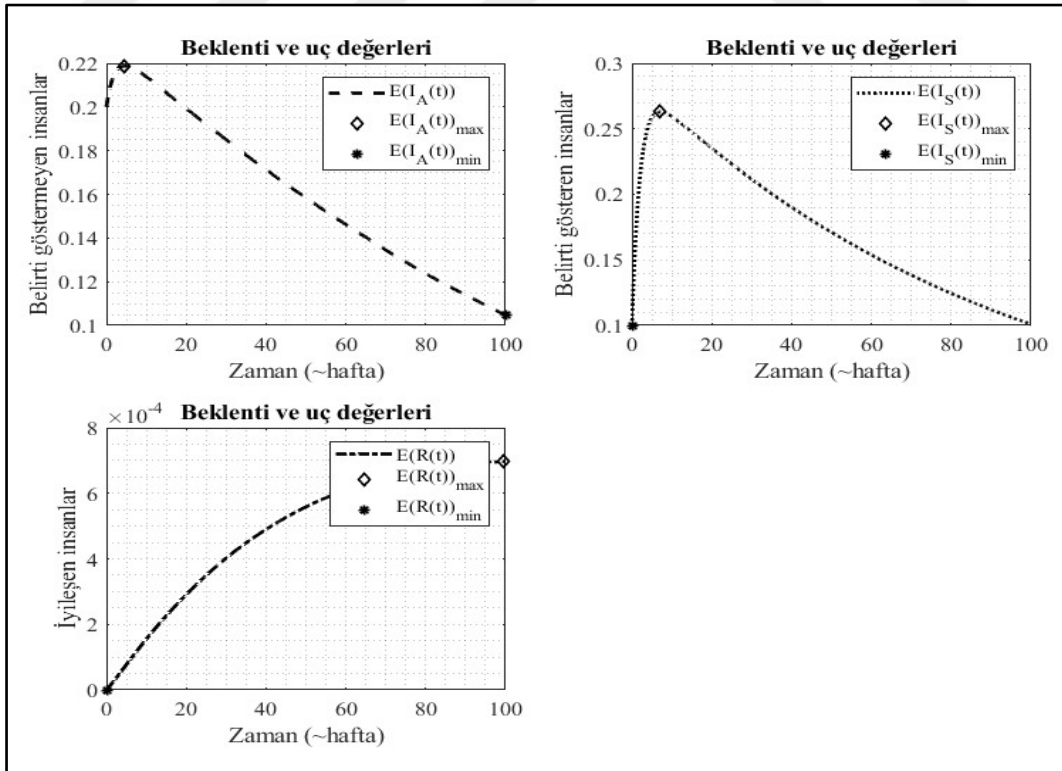
şekil 6. Hastalığa duyarlı, hastalık bulasışmış ve karantinadaki insanların rastgele ve ortalama geręekleřmeleri



şekil 7. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların rastgele ve ortalama geręekleřmeleri



Şekil 8. Hastalığa duyarlı, hastalık bulaşmış, karantinadaki insanların beklenti ve uç değerleri

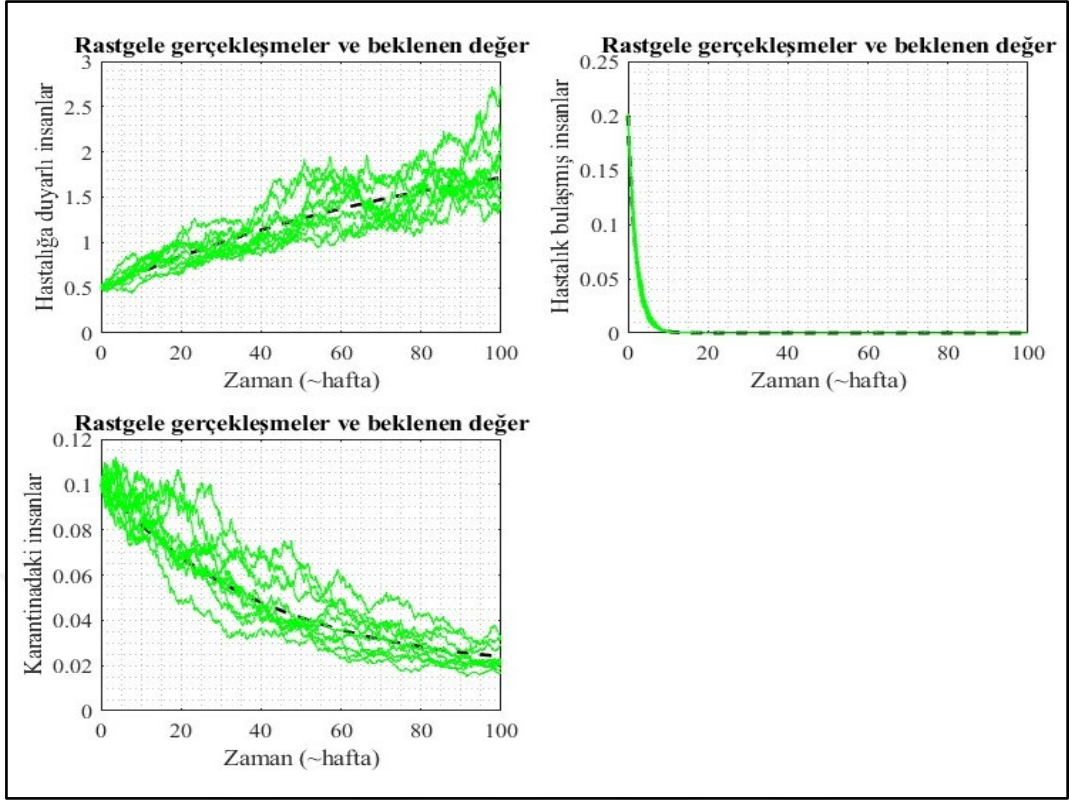


Şekil 9. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların beklenti ve uç değerleri

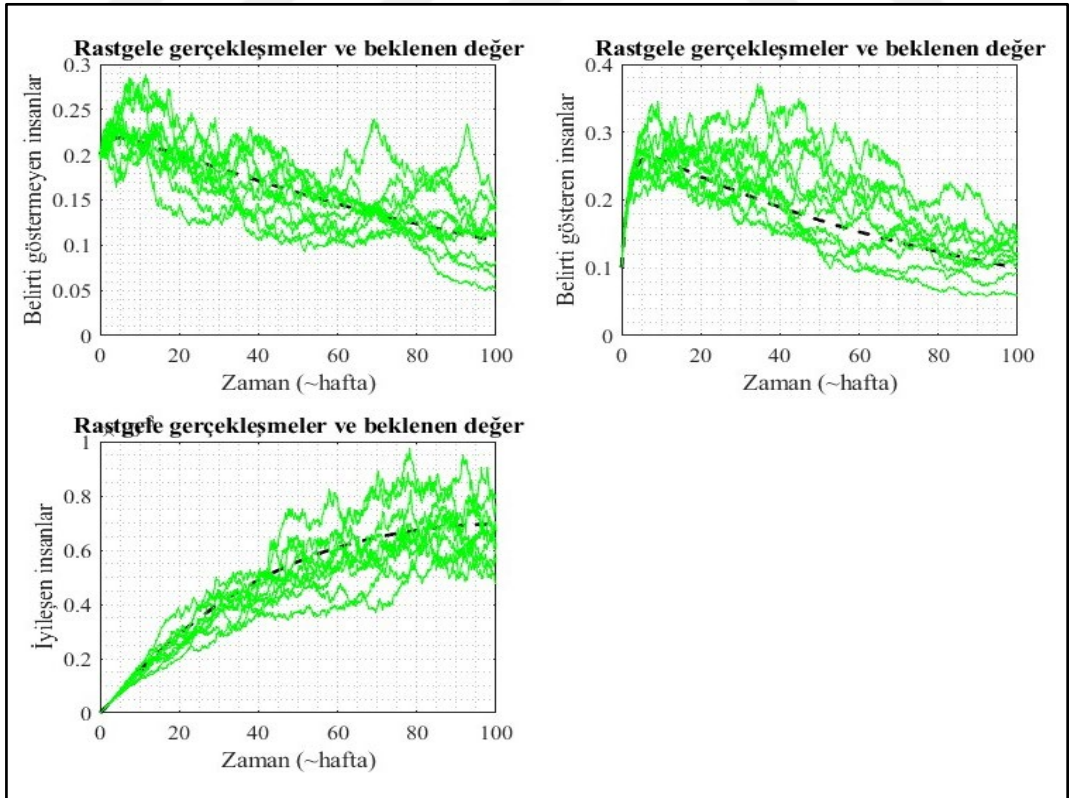
Grafiklerde kompartımanların bazı rastgele davranışları, ortalama davranışları ve ortalama davranışlarının uç değerleri gösterilmektedir. Bu bölümdeki sonuçlar stokastik modelde $\alpha_i = 0.01, i = 1, \dots, 6$ difüzyon katsayısı ve $N = 2^{15}$ tekrar kullanılarak yapılan simülasyondan elde edilmiştir.

3.3. Stokastik Sonuçlar (Milstein)

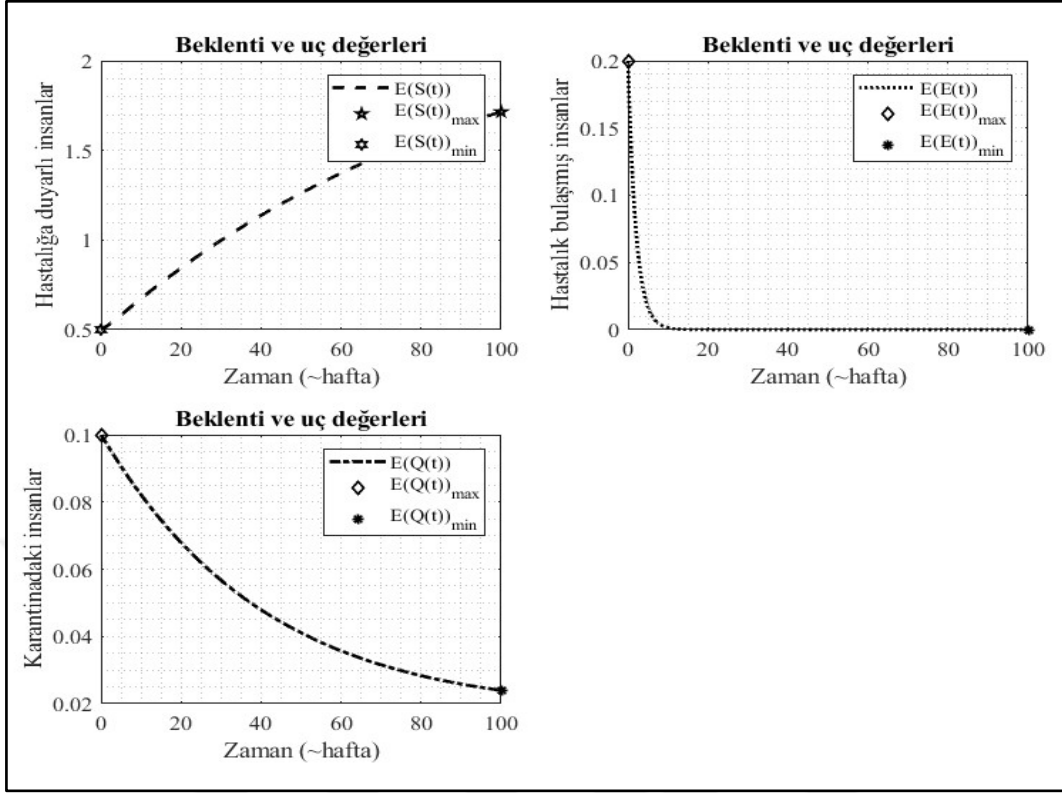
$SEQI_A I_S R$ tipli stokastik diferansiyel denklem sistemi için Milstein yönteminin uygulanmasıyla elde edilen uç değerler hem deterministik uç değerlerle hem de Euler-Maruyama ile benzer uç değerler vermektedir. $S(t)$ değişkeni için minimum değeri $t = 0$ anında 0.5000 olup, $t = 100$ anında 1.7150 maksimum değerini almaktadır (Şekil 10, Şekil 12). $E(t)$ değişkeni için minimum değer $t = 100$ anında 0 iken, maksimum değeri $t = 0$ anında 0.2000 olarak elde edilmiştir (Şekil 10, Şekil 12). $Q(t)$ değişkeni için minimum değeri $t = 100$ anında 0.0240 olup, $t = 0$ anında 0.1000 maksimum değeri olmaktadır (Şekil 10, Şekil 12). I_A değişkeni için minimum değeri $t = 100$ anında 0.1047 iken, maksimum değeri $t = 4.600$ anında 0.2188 elde edilmektedir (Şekil 11, Şekil 13). I_S değişkeni için minimum değeri $t = 100$ anında 0.0999 olup, $t = 7$ anında 0.2627 maksimum değeri olmaktadır (Şekil 11, Şekil 13). $R(t)$ değişkeni için $t = 0$ anında minimum değeri 0 iken, $t = 99.8000$ anında maksimum 0.0007 değerini almaktadır (Şekil 11, Şekil 13).



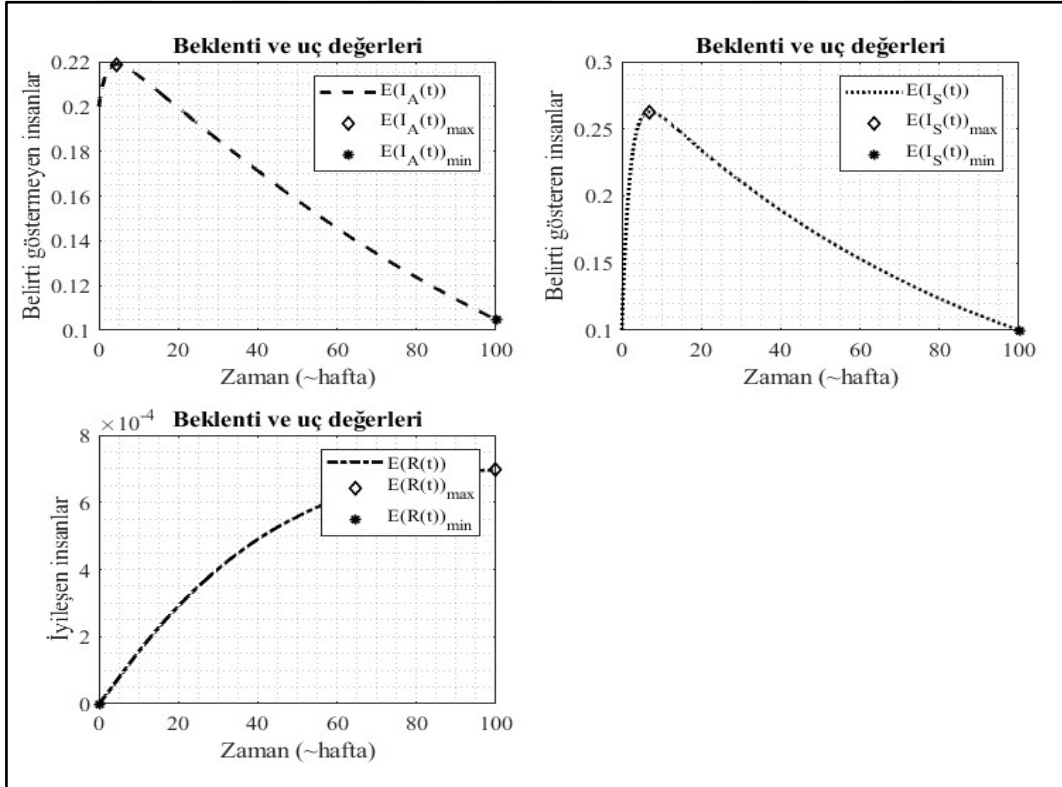
şekil 10. Hastalığa duyarlı, hastalık bulaşmış ve karantinadaki insanların rastgele ve ortalama geręekleřmeleri



şekil 11. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların rastgele ve ortalama geręekleřmeleri



Şekil 12. Hastalığa duyarlı, hastalık bulaşmış ve karantinadaki insanların beklenti ve uç değerleri



Şekil 13. Belirti göstermeyen, belirti gösteren ve iyileşen insanların beklenti ve uç değerleri

Grafiklerde kompartımanların bazı rastgele davranışları, ortalama davranışları ve ortalama davranışlarının uç değerleri görülmektedir. Bu bölümdeki sonuçlar da stokastik modelde $\alpha_i = 0.01, i = 1, \dots, 6$ difüzyon katsayısı ve $N = 2^{15}$ tekrar kullanılarak yapılan simülasyondan elde edilmiştir.

3.4. Sonuçların Karşılaştırılması ve Yorumlanması

Bu bölümde COVID-19 hastalığının deterministik modelin sonuçları ile rastgele etkiler altındaki davranışının incelenmesi için oluşturulan stokastik modelin Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleriyle elde edilen ortalama sonuçları karşılaştırılacaktır.

Tablo 2. Kompartımanların deterministik, Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleriyle elde edilen uç değerleri

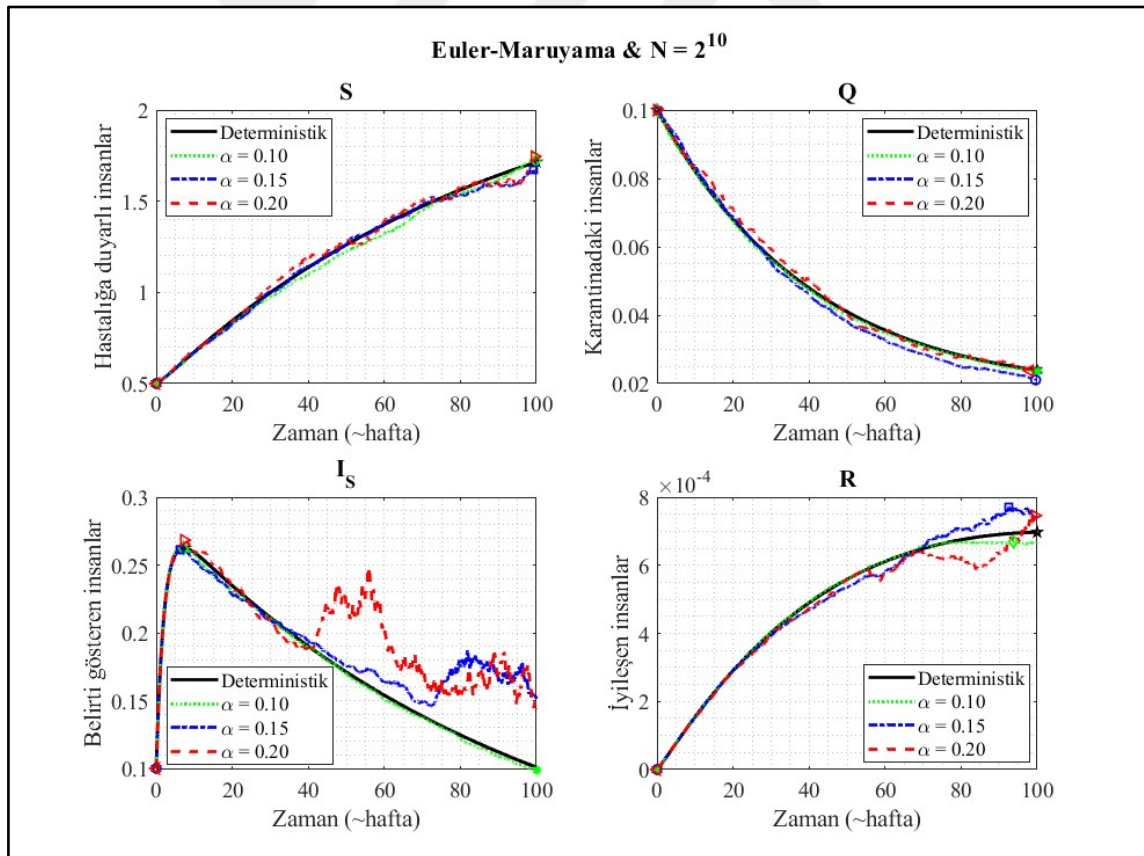
	Minimum			Maksimum		
	Deterministik	Euler-Maruyama	Milstein	Deterministik	Euler-Maruyama	Milstein
$S(t)$	0.5	0.5	0.5	1.7152	1.7141	1.7150
$E(t)$	0	0	0	0.2	0.2	0.2
$Q(t)$	0.0239	0.0239	0.0240	0.1	0.1	0.1
$I_A(t)$	0.1047	0.1055	0.1047	0.2186	0.2190	0.2188
$I_S(t)$	0.1	0.1	0.0999	0.2626	0.2633	0.2627
$R(t)$	0	0	0	0.0007	0.0007	0.0007

Kaynak çalışmada modelin üreme katsayısı $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta\Lambda}{(\gamma+\mu+\eta+\sigma)(\tau+\mu)}$ şeklinde verilmiştir.

Parametre değerleri simülasyon için $\Lambda = 0.02537$, $\beta = 0.0805$, $\tau = 0.0002$, $\gamma = 2.0138 \times 10^{-4}$, $\eta = 0.4478$, $\sigma = 0.0668$ ve $\mu = 0.0106$ olarak kullanıldığı için bu üreme katsayısı $\mathcal{R}_0 = 0.359916$ olarak hesaplanmaktadır. $\mathcal{R}_0 < 1$ olması durumu toplumda hasta bir bireyin hastalığını bir kişiden daha az oranda kişiye bulaştıracığını gösterdiği için bu üreme katsayısı incelenen süreç sonunda hastalığın toplumda yok olması beklentisini oluşturmaktadır. Sayısal sonuçlar ve çözüm grafikleri göz önüne alındığında incelenen 100 haftalık süreç sonunda topluluktaki hastalığa maruz kalmış ($E(t)$), karantinaya alınmış bireylerin ($Q(t)$) ve hastalık belirtisi göstermeyen-gösteren ($I_A(t), I_S(t)$) bireylerin büyük oranda azalma gösterdiği ve neredeyse sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Bu sonuç $\mathcal{R}_0 = 0.359916$ değerinin oluşturduğu beklenti ile uyumlu olup kullanılan denklem sistemi, başlangıç değerleri ve parametrelerin

modellediği durumda hastalığın toplumda büyük bir salgına dönüşmeyeceği anlamına gelmektedir. Farklı parametre değerleri ile $\mathcal{R}_0 > 1$ olan bir durumun modellenmesi bir hasta bireyin toplumda hastalığını birden daha büyük oranda kişiye bulaştıracığı ve hastalığın salgına dönüşeceği bir senaryonun da modellenmesi mümkündür. Örneğin hastalığa duyarlı bireyler ile hastalığa maruz kalmış bireylerin temas oranını gösteren β parametresinin değerinin $\beta = 0.0805$ yerine $\beta = 0.38091$ alınması durumunda üreme katsayısı $\mathcal{R}_0 = 1.703052$ olarak elde edilmektedir. Bu durum hastalığa maruz kalmış bireyler ile hastalığa duyarlı bireylerin arasındaki temasın artması durumunda hastalığın salgına dönüşeceğinin matematiksel olarak ifade edilebileceğini göstermektedir.

Aşağıdaki şekilde (4) stokastik modeliyle COVID-19 hastalığının 100 hafta boyunca stokastik gürültü altındaki ortalama gerçekleştirmeleri ve deterministik modelin çözümleri Euler-Maruyama yöntemi kullanılarak verilmektedir (Şekil 14).



Şekil 14. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların farklı difüzyon değerleri için çözümleri

Aşağıdaki tablolarda Şekil 14 ile verilen simülasyonlarda S, Q, I_s, R

kompartımanları için MATLAB programında 2^{10} tekrar kullanılarak ($\alpha_i = \alpha$), farklı difüzyon katsayıları ile elde edilen uç değerler gösterilmektedir (Tablo 3, 4, 5, 6).

Tablo 3. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için S kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.5	0	1.7152	100
$\alpha = 0.10$	0.5	0	1.7249	99.8
$\alpha = 0.15$	0.5	0	1.6711	99.1
$\alpha = 0.20$	0.5	0	1.7455	99.5

Tablo 4. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için Q kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.0239	100	0.1	0
$\alpha = 0.10$	0.0235	100	0.1	0
$\alpha = 0.15$	0.0210	99.6	0.1	0
$\alpha = 0.20$	0.0238	98.1	0.1	0

Tablo 5. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için I_S kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.1	0	0.2626	7.2
$\alpha = 0.10$	0.0992	100	0.2620	7.1
$\alpha = 0.15$	0.1	0	0.2610	6.1
$\alpha = 0.20$	0.1	0	0.2684	7.3

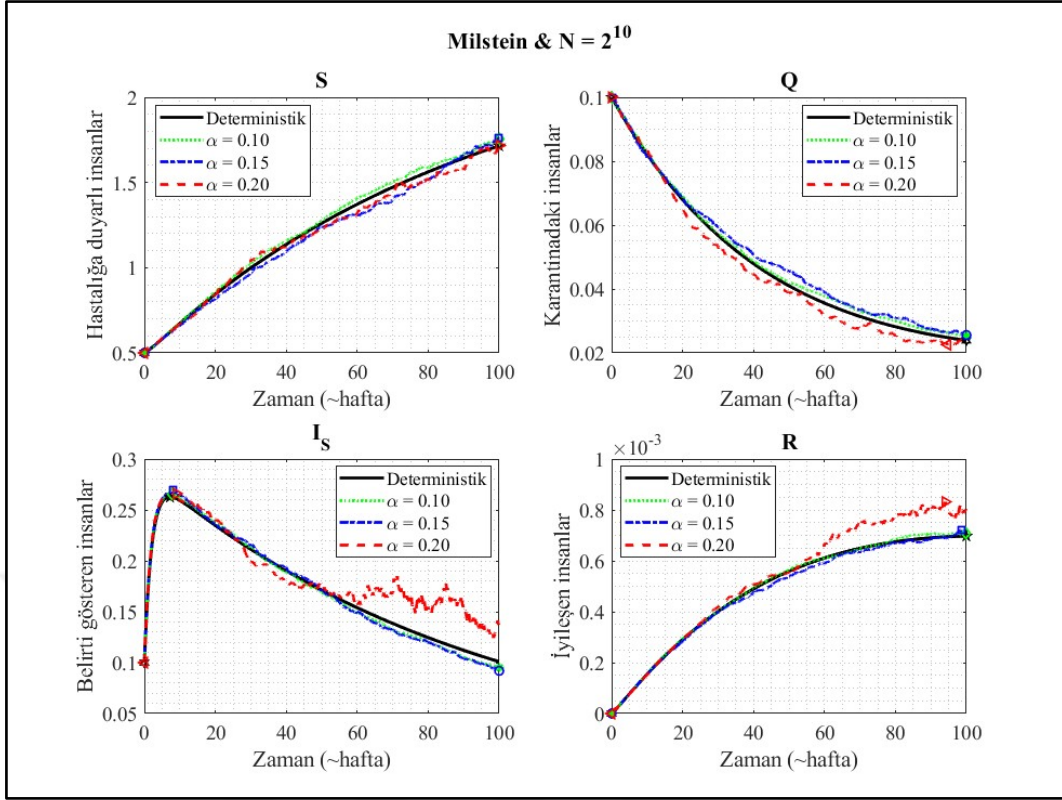
Tablo 6. Euler-Mar. yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için R kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0	0	0.0007	100
$\alpha = 0.10$	0	0	0.0007	93.8
$\alpha = 0.15$	0	0	0.0008	92.5
$\alpha = 0.20$	0	0	0.0007	99.4

Bu ilk simülasyonda (4) stokastik modeli Euler-Maruyama yöntemi ile 2^{10} tekrar kullanılarak çözdürülmüştür ve farklı difüzyon katsayıları ile elde edilen ortalama gerçekleştirmeleri S, Q, I_S, R kompartımanları için kendi aralarında ve deterministik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Difüzyon katsayılarındaki değişikliklerin sonuçları nasıl etkilediği gösterilmeye çalışılmıştır. Bu dört kompartımanın $\alpha = 0.10, \alpha = 0.15$ ve $\alpha = 0.20$ artan değerleri için stokastik ve deterministik sonuçları grafik ve tablolar ile sunulmaktadır. Stokastik gürültünün yoğunluğuna etki eden difüzyon katsayısının artışı, stokastik değişkenliği arttırmakta olup katsayıdaki düşüş ile stokastik sonuçlardaki değişkenlik azalarak deterministik sonuçlara yakın hale gelmesi beklenmektedir. Grafiklerde görüldüğü gibi kompartımanların, $\alpha = 0.10$ en

düşük değeri için vermiş olduğu yeşil sonuçlar deterministik eğriye daha yakın olmaktadır. Difüzyon katsayısındaki artışlar nedeniyle $\alpha = 0.15$ değeri için mavi ve $\alpha = 0.20$ değeri için ise kırmızı olan stokastik sonuçlarda değişkenlik giderek artmaktadır. Tablolara bakıldığında difüzyon katsayısındaki artışlar sebebiyle çözümlerin ve gerçekleşme zamanlarının değişimi söz konusu olsa da minimum ve maksimum değerler benzerlik göstermektedir. Hastalığa duyarlı insanların kompartımanı olan S için elde edilen maksimum sonuçlar hem deterministik hem de üç difüzyon değeri için $t = 99.1$ ile $t = 100$ zaman aralığında elde edilmiş olup bulunan değerler 1.6711 ile 1.7455 arasında değişmektedir. Benzer şekilde karantinadaki insanların kompartımanı olan Q için de minimum değer, dört durumda da $t = 98.1$ ile $t = 100$ arasında elde edilmiş ve bulunan sonuçlar 0.0210 ile 0.0239 arasında değişim göstermektedir. Aynı zamanda belirti gösteren insanlar kompartımanı I_S ve iyileşen insanlar kompartımanı R için de benzer durumlar gerçekleşmektedir (Tablo 3-6).

COVID-19 hastalığının (4) stokastik modeliyle 100 haftalık süreç içerisinde stokastik gürültü altındaki ortalama gerçekleştirmeleri ve deterministik modelin çözümleri Milstein yöntemi kullanılarak aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 15).



Şekil 15. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların farklı difüzyon değerleri için çözümleri

Şekil 15 ile verilen simülasyonlarda S, Q, I_s, R kompartımanları için MATLAB programında 2^{10} tekrar kullanılarak, farklı difüzyon katsayıları ile elde edilen uç değerler tablolarda gösterilmektedir (Tablo 7, 8, 9, 10).

Tablo 7. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için S kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.5	0	1.7152	100
$\alpha = 0.10$	0.5	0	1.7554	100
$\alpha = 0.15$	0.5	0	1.7630	99.9
$\alpha = 0.20$	0.5	0	1.7167	100

Tablo 8. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için Q kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.0239	100	0.1	0
$\alpha = 0.10$	0.0252	100	0.1	0
$\alpha = 0.15$	0.0256	100	0.1	0
$\alpha = 0.20$	0.0225	94.7	0.1	0

Tablo 9. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için I_S kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.1	0	0.2626	7.2
$\alpha = 0.10$	0.0955	100	0.2658	7.7
$\alpha = 0.15$	0.0919	100	0.2701	8.1
$\alpha = 0.20$	0.1	0	0.2660	9

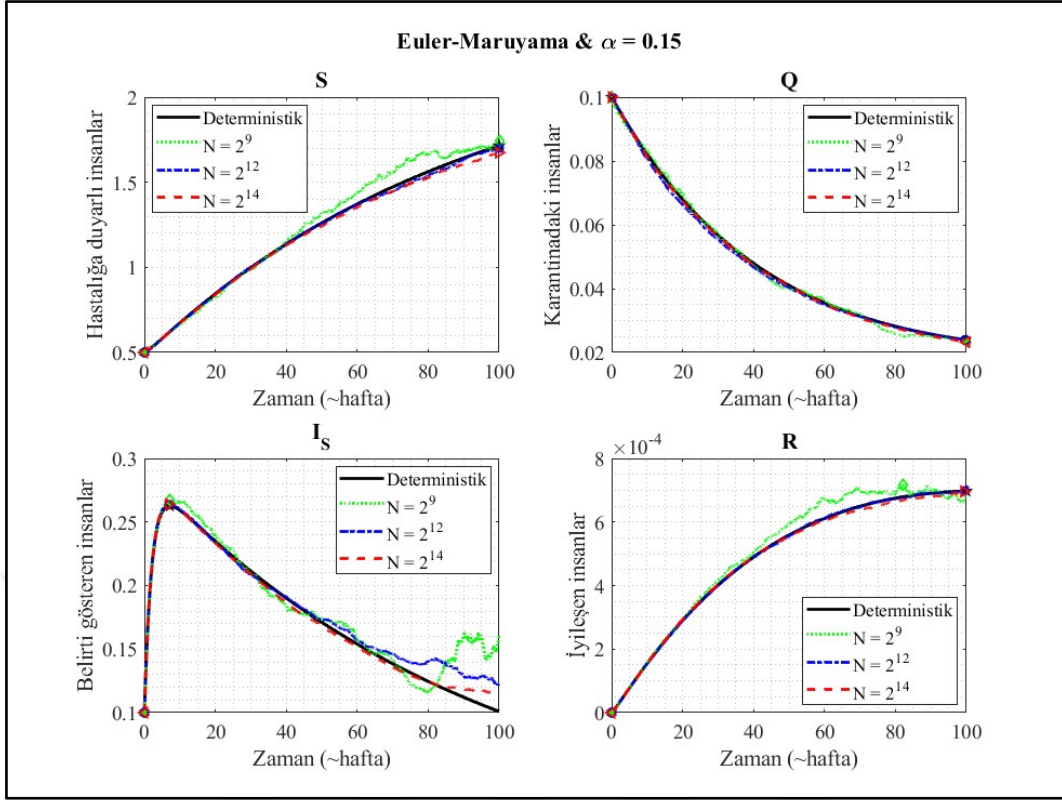
Tablo 10. Milstein yöntemi ve $N = 2^{10}$ tekrar için R kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0	0	0.0007	100
$\alpha = 0.10$	0	0	0.0007	99.9
$\alpha = 0.15$	0	0	0.0007	98.5
$\alpha = 0.20$	0	0	0.0008	94

(4) stokastik modeli Milstein yöntemi ile $N = 2^{10}$ tekrar kullanılarak ve farklı difüzyon katsayıları ile elde edilen ortalama gerçekleştirmeleri S, Q, I_S, R kompartımanları için kendi aralarında ve deterministik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Euler-Maruyama yönteminde kullanılan farklı difüzyon katsayılarını bu kez Milstein yöntemi içinde kullanarak sonuçların nasıl etkilendiği gösterilmeye çalışılmıştır. Milstein yönteminde de $\alpha = 0.10, \alpha = 0.15, \alpha = 0.20$ difüzyon katsayıları için stokastik gürültünün miktarı kontrol eden değer olduğundan difüzyon katsayısındaki artış ile stokastik sonuçlardaki dalgalanmalar artarken, bu katsayıdaki azalış ile sonuçlar da deterministik sonuçlara yaklaşmaktadır. Örneğin I_S kompartmanı için maksimum değerler $t = 7.2$ ile $t = 9$ arasında elde edilmiş ve bulunan değerler 0.2626 ile 0.2701 arasında değişim göstermektedir. R kompartmanı içinde maksimum değerler $t = 94$ ile $t = 100$ aralığında olup elde edilen değerler 0.0007 ile 0.0008 arasında değişmektedir.

Benzer şekilde hastalığa duyarlı insanlar kompartmanı S ve karantinadaki insanlar kompartmanı Q için de bu durum geçerlilik göstermektedir (Tablo 7-10).

Aşağıdaki şekilde S, Q, I_S, R kompartımanları için $\alpha = 0.15$ sabit difüzyon katsayısı ile $N = 2^9, 2^{12}$ ve 2^{14} olmak üzere farklı tekrar sayılarında çözümleri Euler-Maruyama yöntemi kullanılarak verilmektedir (Şekil 16).



Şekil 16. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak çözümleri

Aşağıdaki tablolarda S, Q, I_s, R kompartımanları için MATLAB programında, Euler-Maruyama yönteminin farklı tekrarlarla yapılması sonucunda elde edilen uç değerler verilmektedir (Tablo 11, 12, 13, 14).

Tablo 11. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için S kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.5	0	1.7152	100
$N = 2^9$	0.5	0	1.7454	100
$N = 2^{12}$	0.5	0	1.7008	100
$N = 2^{14}$	0.5	0	1.6740	99.9

Tablo 12. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için Q kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.0239	100	0.1	0
$N = 2^9$	0.0232	99.9	0.1	0
$N = 2^{12}$	0.0239	99.7	0.1	0
$N = 2^{14}$	0.0232	100	0.1	0

Tablo 13. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için I_S kompartımanına ait sonuçlar

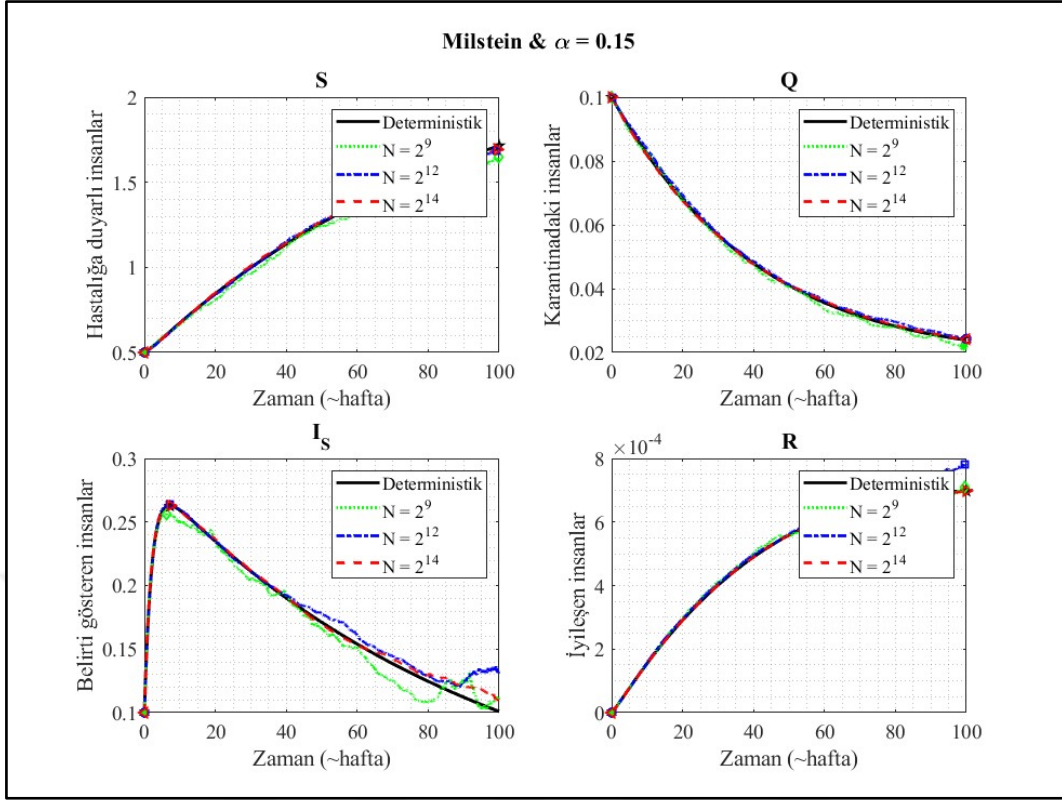
	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.1	0	0.2626	7.2
$N = 2^9$	0.1	0	0.2670	7.3
$N = 2^{12}$	0.1	0	0.2641	6.8
$N = 2^{14}$	0.1	0	0.2639	6.9

Tablo 14. Euler-Maruyama yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için R kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0	0	0.0007	100
$N = 2^9$	0	0	0.0007	82.2
$N = 2^{12}$	0	0	0.0007	99.5
$N = 2^{14}$	0	0	0.0007	99.3

Tablolarda görüldüğü üzere, S, Q, I_S, R kompartımanlarının çözüm eğrileri ile bu değişkenlerin deterministik çözüm eğrileri arasında genel anlamda benzerlik görülsede uç değerlerde farklılıklar göstermektedir. Uç değerlerdeki bu farklılık simülasyon sayısının artmasıyla azalmaktadır. Örneğin, karantinadaki insanlar kompartmanı Q için minimum değer $t = 99.9$ anında $N = 2^9$ için 0.0232 olmakta iken $t = 99.7$ anında $N = 2^{12}$ için 0.0239 olmaktadır. Benzer şekilde belirti gösteren insanlar kompartmanı I_S için maksimum değer $t = 6.8$ anında $N = 2^{12}$ için 0.2641 olarak elde ediliyorken, $t = 6.9$ anında $N = 2^{14}$ için 0.2639 olarak elde edilmektedir. Simülasyon sayısının artışı ile stokastik gürültü altındaki beklenen değerler ile deterministik değer arasındaki uyum artmaktadır.

(4) stokastik modelinin bazı kompartımanları için Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ sabit difüzyon katsayısı ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak 100 haftalık süreçteki stokastik gürültü altındaki gerçekleştirmeleri ve deterministik modelin çözümlerinin simülasyonu aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 17)



Şekil 17. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak çözümleri

Tablolarda S, Q, I_s, R kompartımanları için sabit difüzyon katsayısının kullanılmasıyla farklı tekrarlardaki çözümlerinin uç değerleri gösterilmektedir (Tablo 15, 16, 17, 18).

Tablo 15. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için S kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.5	0	1.7152	100
$N = 2^9$	0.5	0	1.6455	99.7
$N = 2^{12}$	0.5	0	1.6877	99.2
$N = 2^{14}$	0.5	0	1.6930	99.5

Tablo 16. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için Q kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.0239	100	0.1	0
$N = 2^9$	0.0219	99.3	0.1	0
$N = 2^{12}$	0.0243	100	0.1	0
$N = 2^{14}$	0.0241	100	0.1	0

Tablo 17. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için I_S kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.1	0	0.2626	7.2
$N = 2^9$	0.1	0	0.2565	6.2
$N = 2^{12}$	0.1	0	0.2642	7.3
$N = 2^{14}$	0.1	0	0.2629	7.3

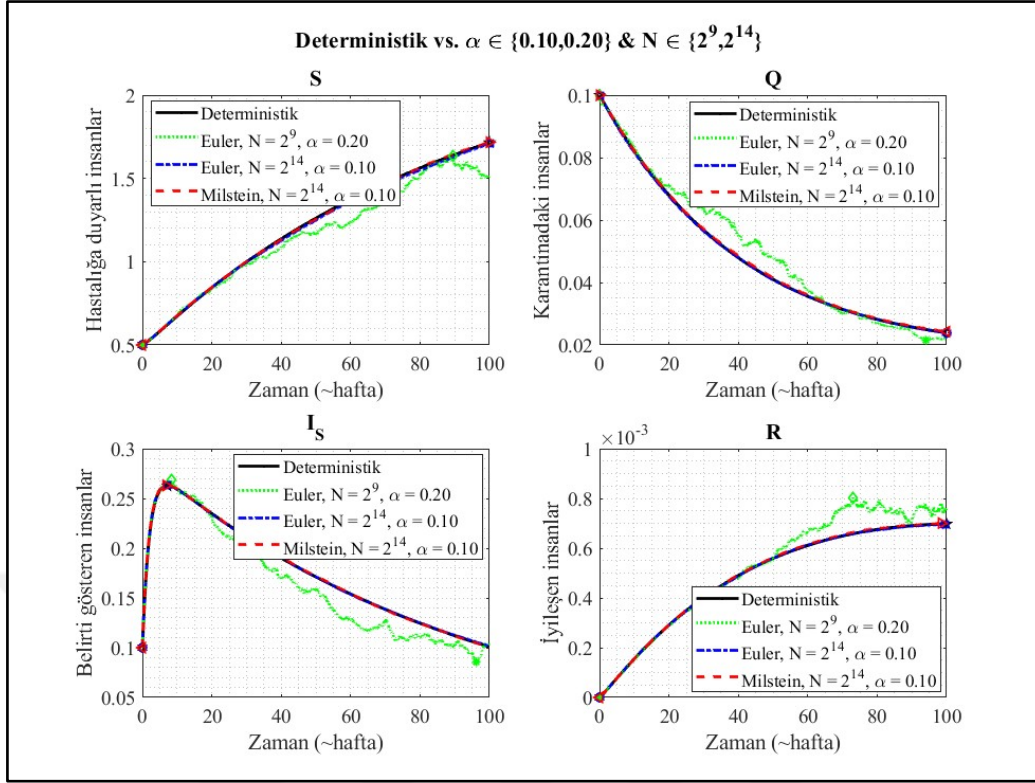
Tablo 18. Milstein yöntemi ile $\alpha = 0.15$ değeri ve $N = 2^9, 2^{12}, 2^{14}$ tekrar kullanılarak oluşan simülasyon için R kompartımanına ait sonuçlar

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0	0	0.0007	100
$N = 2^9$	0	0	0.0007	99.6
$N = 2^{12}$	0	0	0.0008	99.5
$N = 2^{14}$	0	0	0.0007	100

Yukarıdaki tablolarda modelin sabit difüzyon katsayısı değeri altında Milstein yönteminin farklı tekrarlarda kullanılmasıyla elde edilen uç değerler ile deterministik uç değerler farklılık göstermektedir. Bu farklılıklar olmasına rağmen çözüm eğrileri arasındaki benzerlik Euler-Maruyama yönteminde olduğu gibi bu yöntemde de vardır. (4) stokastik modelinin, stokastik gürültü etkisi sonucunda uç değerlerinde farklılıklar olsa da simülasyon sayısı artmasıyla sonuçlarında deterministik modelin uç değerlerine yaklaştığı görülmektedir. Örneğin, hastalığa duyarlı insanlar kompartımanı S için $t = 99.7$ anında $N = 2^9$ tekrarda maksimum değeri 1.6455 olarak elde edilirken, $t = 99.5$ anında $N = 2^{14}$ tekrarda maksimum değeri 1.6930 olmaktadır.

Hem Euler-Maruyama yönteminde hem de Milstein yönteminde stokastik modelin beklenen uç değerleri ile deterministik uç değerler arasındaki farklılıkların ortadan kaldırılması ve çözümlerin birbirine daha yaklaşması için tekrar sayısının artış göstermesi gerekmektedir.

COVID-19 hastalığı için oluşturulan (4) stokastik modelinin bazı kompartımanları için 100 haftalık süreç içerisinde hem tekrar sayısı, hem difüzyon katsayısı ve hem de yöntemi değiştirerek oluşturulan karma simülasyonun çözümleri aşağıdaki şekilde gösterilmektedir (Şekil 18).



Şekil 18. Hastalığa duyarlı, karantinadaki, belirti gösteren ve iyileşen insanların $\alpha = 0.10, 0.20$ $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar kullanılarak çözümleri

Aşağıdaki tablolarda S, Q, I_S, R kompartımanları için farklı difüzyon katsayısı, farklı tekrar sayısı ve farklı yöntemler sonucunda oluşan uç değerler verilmektedir (Tablo 19, 20, 21, 22).

Tablo 19. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için S kompartımanı sonuçları

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.5	0	1.7152	100
<i>Euler</i> , $N = 2^9, \alpha = 0.20$	0.5	0	1.6373	89.4
<i>Euler</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0.5	0	1.7093	100
<i>Milstein</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0.5	0	1.7181	100

Tablo 20. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için Q kompartımanı sonuçları

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.0239	100	0.1	0
<i>Euler</i> , $N = 2^9, \alpha = 0.20$	0.0216	94.1	0.1	0
<i>Euler</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0.0239	100	0.1	0
<i>Milstein</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0.0243	100	0.1	0

Tablo 21. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için I_S kompartımanı sonuçları

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0.1	0	0.2626	7.2
<i>Euler</i> , $N = 2^9, \alpha = 0.20$	0.0854	96.3	0.2686	8.3
<i>Euler</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0.1	0	0.2631	7.2
<i>Milstein</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0.1	0	0.2630	6.8

Tablo 22. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9, 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10, 0.20$ ile Milstein yöntemi için $N = 2^{14}$ tekrar ve $\alpha = 0.10$ için R kompartımanı sonuçları

	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Deterministik	0	0	0.0007	100
<i>Euler</i> , $N = 2^9, \alpha = 0.20$	0	0	0.0008	73
<i>Euler</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0	0	0.0007	99.6
<i>Milstein</i> , $N = 2^{14}, \alpha = 0.10$	0	0	0.0007	98.5

Yukarıdaki tablolarda model için sabit difüzyon katsayısı yerine farklı difüzyon katsayısı kullanılması, aynı zamanda daha fazla tekrar yapılması ile elde edilen uç değerlerin deterministik sonuçlara göre durumları görülmektedir. Euler-Maruyama yöntemi için $N = 2^9$ tekrar ve $\alpha = 0.20$ difüzyon katsayısı için elde edilen uç değerler, tekrar sayısının artması ile $N = 2^{14}$ tekrar ve difüzyon katsayısının azalarak $\alpha = 0.10$ olmasıyla deterministik sonuca daha yakın değerler elde edilmektedir. Benzer şekilde farklı yöntemler kullanılmasına rağmen tekrar sayısındaki artış ve difüzyon katsayısındaki azalış sonucunda elde edilen uç değerler ve çözüm eğrileri, deterministik uç değerlere ve çözüm eğrisine daha yakın sonuç vermektedir. Örneğin, I_S kompartımanı için Euler-Maruyama yönteminin $N = 2^9$ ve $\alpha = 0.20$ olarak kullanılmasıyla elde edilen maksimum değer 0.2686 olup, aynı yöntemin $N = 2^{14}$ ve $\alpha = 0.10$ olarak kullanılması sonucunda elde edilen maksimum değer 0.2631 olmaktadır. I_S kompartımanı için Euler-Maruyama yönteminin $N = 2^9$ ve $\alpha = 0.20$ olarak kullanılmasıyla elde edilen minimum değer 0.0854 iken, Milstein yönteminin $N = 2^{14}$ ve $\alpha = 0.10$ olarak kullanılması sonucunda elde edilen minimum değer 0.1 olmaktadır. Her iki örnekte görüldüğü gibi hem tekrar sayısındaki artış hem de difüzyon katsayısındaki azalış sonuçları deterministik sonuçlara daha da yaklaştırmaktadır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada literatürde var olan bir deterministik COVID-19 yayılımı modeli kullanılarak bu hastalığın yayılımının stokastik davranışları incelenmiştir. Deterministik diferansiyel denklem sistemine stokastik gürültü eklenerek oluşturulan stokastik diferansiyel denklem sisteminin farklı yöntemlerle incelemesi sonucunda elde edilen sonuçlar hastalığın yayılımının stokastik dinamikleri ve hastalıkla ilgili diğer beklentiler açısından yorumlanmış ve modelin stokastik incelenmesiyle ilgili detaylı bir inceleme yapılmıştır.

COVID-19 hastalığı için öncelikle deterministik modelin sayısal incelemesi yapılmıştır. Model değişkenleri için elde edilen çözümlerin uç değerleri ile bu değerlerin hangi anlarda elde edildiğinin tablolarla ifade edilmesi ve çözüm eğrilerinin davranışları birlikte sunulmuştur. COVID-19 hastalığının deterministik matematiksel modeli olan (2) denklem sistemine stokastik gürültü eklenerek (4) stokastik denklem sistemi elde edilmiştir. Elde edilen stokastik model Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleri kullanılarak incelenmiştir. İnceleme sonucunda elde edilen ortalama çözümlerin deterministik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür. Grafiklere bakıldığında çözüm eğrilerindeki ufak farklılıkların sebebi ise eklenen gürültü terimleridir. Stokastik simülasyon bileşenlerindeki (difüzyon katsayısı, tekrar sayısı vb.) değişimlerin ortalama çözümlere etkisi incelendiğinde difüzyon katsayısındaki azalmanın deterministik modelden elde edilen sonuçlara daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Difüzyon katsayısı modeldeki stokastik gürültünün miktarını kontrol ettiği için bu sonuç teorik beklentiyle uyumludur. Benzer şekilde simülasyonda kullanılan tekrar sayısındaki artış ve Euler-Maruyama yöntemi yerine Milstein yönteminin kullanılması da deterministik sonuçlara yakın değerler elde edilmesine yol açmaktadır.

Stokastik modelde simülasyon bileşenlerindeki değişimin sonuca etkilerinin incelenmesi için difüzyon katsayılarının, simülasyon sayısının ve stokastik yöntemin değiştirilmesi ile yapılan çeşitli incelemeler deterministik modelin farklı açılardan incelenmesine olanak sağlamıştır. İlk olarak sadece difüzyon katsayısı değiştirilip simülasyon sayısının ve kullanılan yöntemin aynı olması durumu incelenmiştir. Örneğin, Euler-Maruyama yöntemi ve 2^{10} tekrar kullanılarak, difüzyon katsayısı $\alpha =$

0.10 için Q kompartımanının minimum değeri 0.0235 iken, $\alpha = 0.15$ için minimum değerin 0.0210 olduğu görülmektedir. Deterministik durumda bu değer 0.0239 elde edildiği için bu örnek sadece difüzyon katsayısındaki değişimin artmasıyla elde edilen sonuçların deterministik sonuçlardan uzaklaştığını göstermektedir. Benzer durum diğer kompartımanlar için de karşımıza çıkmaktadır.

Sonrasında simülasyon sayısının değiştirilmesi fakat difüzyon katsayısının ve yöntemin aynı olması durumu incelenmiştir. Örneğin, Milstein yöntemi kullanılarak $\alpha = 0.15$ değeri için $N = 2^9$ tekrar yapılarak I_S kompartımanı için elde edilen maksimum sonuç 0.2565 olup, $N = 2^{12}$ tekrar için elde edilen değer 0.2642 olmaktadır. Böylelikle tekrar sayısındaki artışın sonucunda elde edilen değerlerin deterministik çözüme (0.2626) daha uyumlu olduğu görülmüştür. Benzer durumun Euler-Maruyama için de geçerli olduğu görülmektedir.

Son aşamada stokastik modelde simülasyon bileşenlerindeki değişim karma bir şekilde incelenmiştir. Difüzyon katsayısının $\alpha = 0.10, 0.15, 0.20$, simülasyon sayısının $N = 2^9, 2^{12}$ ve 2^{14} ve yöntemin ise Euler-Maruyama ve Milstein olarak değiştirilmesi ile elde edilen sonuçlar bu inceleme için ele alınmıştır. Daha fazla tekrar kullanılarak daha küçük difüzyon katsayısını içeren modellerde ortalama sonuçların deterministik sonuçlara daha yakın elde edildiği görülmüştür. Örneğin, S kompartımanı için Euler-Maruyama yöntemi kullanılarak $N = 2^9$ ve $\alpha = 0.20$ değerlerinde maksimum değer 1.6373 elde edilirken, Milstein yöntemi kullanılarak $N = 2^{14}$ ve $\alpha = 0.10$ değerleri için 1.7181 elde edilmiştir (deterministik sonuç 1.7152). Örnek olarak verilen kompartımanlarda yaşanan uyumun diğer kompartımanlar için de söz konusu olduğu grafik ve tablolarda görülmektedir.

COVID-19 hastalığının seyri ve kompartımanların rastgele durumdaki davranışlarının incelenmesi için kullanılan kaynak çalışma 2021 yılında Ahmed vd. tarafından yayımlanan “A mathematical model of Coronavirus Disease (COVID-19) containing asymptomatic and symptomatic classes” başlıklı çalışmada sunulan deterministik adi diferansiyel denklem sistemidir. Bu deterministik sistemin incelenmesi sonucunda elde edilen çözümlerle stokastik modelin çözümlerinin arasındaki uyum yapılan çalışmalar neticesinde oluşturulan grafiklerde görülmektedir. Bu grafiklerdeki uç değerler ve çözüm eğrilerinin deterministik çözümlerle yapılan incelemeler sonucunda elde edilen uç değerler ve çözüm eğrileri ile uyumu rastgele

incelemelerin modelleme açısından kullanımının uygunluğunu göstermektedir.

Deterministik model için kullanılan kaynak çalışmada belirtilen üreme katsayısı incelendiğinde stokastik simülasyonda kullanılan parametre değerleri için $\mathcal{R}_0 = 0.359916$ sonucu elde edilmiştir. Üreme katsayısının $\mathcal{R}_0 < 1$ olması durumunda hastalığın belli bir süre içinde toplumdan silinmesi beklentisi stokastik simülasyonlar sonucunda da görülmektedir. Özellikle hasta ve hastalığa maruz kalmış bireyleri gösteren E, Q, I_A ve I_S kompartımanlarının değişim grafikleri ele alındığında stokastik modelin bu beklentiyi de doğru bir şekilde karşıladığı sonucuna varılabilir.

Kaynak çalışmaya uygun olarak 100 haftalık bir süreç boyunca incelenen deterministik ve stokastik sonuçlar, bu süreç sonunda hastalığın toplumdan tamamen silineceğini göstermektedir. Kaynak model literatürdeki benzer modellerden farklı olarak belirti gösteren ve göstermeyen enfekte bireylerin sayılarının hastalık süresince seyrine odaklanan bir denklem sistemidir. Bu modelin literatürde ilgili hastalık için kullanılan parametre değerleri ile ele alınması sonucunda yapılan bu çalışma deterministik bir incelemenin yanı sıra stokastik bir modelleme yaklaşımının da hastalığın yayılımının incelenmesi için uygun olacağını göstermektedir.

5. ÖNERİLER

Bu tezde kullanılan yöntemin birçok açıdan geliştirilmesi ve yeni uygulamalarda kullanılması mümkündür. Tez kapsamında COVID-19 hastalığının yayılımı için Ahmed vd. tarafından yayınlanan deterministik model üzerinde yapılan incelemenin literatürdeki uygulamalara benzer şekilde farklı olarak ele alınabilecek birçok yönü bulunmaktadır.

Euler-Maruyama ve Milstein dışında stokastik Runge-Kutta gibi farklı stokastik yöntemler kullanılabilir ve farklı karakteristikler için de elde edilen stokastik uç değerler ve deterministik uç değerlerinin birlikte incelenmesi sonucunda hastalık hakkında daha objektif yorum yapılabilir.

Çalışmada kullanılan kompartıman ve parametre sayısı artacak şekilde daha hassas inceleme yapmayı sağlayacak farklı kapsamda modeller kullanılabilir.

Aynı yaklaşım literatürdeki COVID-19 dışındaki bir hastalığın incelenmesinde kullanılabilir.

Farklı gürültü tipleri ve gerçek veriye daha uyumlu gürültü yapısı kullanılabilir.

Salgın bölgesindeki araştırmalar sonucunda gerçek rakamlarla uyumlu şekilde oluşturabilecek rastgele diferansiyel denklemler ile hastalığın rastgele davranışları incelenebilir.

Bulanık sayılar gibi farklı belirsizlik inceleme araçları, kesirli mertebeden türev veya gecikme terimleri gibi farklı modelleme yaklaşımları ele alınabilir.

Türkiye için açıklanan rakamlara göre parametre veya diğer model bileşenlerinin değerleri belirlenebilir.

Benzer yapıdaki farklı COVID-19 modelleri ile karşılaştırma yapılarak sonuçlardaki değişimler incelenebilir. Oluşturulan model için simülasyon sayısı artırılarak deterministik modelle arasındaki farklılıkların en aza indirilmesi sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- Adewale, S. O., Olopade, I. A., Adeniran, G. A., Ajao, S. O., & Mohammed, I. T. (2017). Mathematical Analysis of Quarantine on the Dynamical Transmission of Diphtheria Disease. *International Journal of Science and Engineering Investigations*, 6(5), 8-17.
- Ahmed, I., Modu, G. U., Yusuf, A., Kumam, P., & Yusuf, I. (2021). A mathematical model of Coronavirus Disease (COVID-19) containing asymptomatic and symptomatic classes. *Results in Physics*, 21, 103776.
- Akdeniz, F. (2018). *Olasılık ve İstatistik* (22. Baskı). Türkiye: Akademisyen Yayınevi.
- Aliyev R. (2010). *Stokastik Süreçler Teorisine Giriş*. Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, Trabzon.
- Arif, M. S., Raza, A., Rafiq, M., & Bibi, M. (2019a). A reliable numerical analysis for stochastic hepatitis B virus epidemic model with the migration effect. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43(5), 2477-2492.
- Arif, M. S., Raza, A., Rafiq, M., Bibi, M., Fayyaz, R., Naz, M., & Javed, U. (2019b). A reliable stochastic numerical analysis for typhoid fever incorporating with protection against infection. *Comput. Mater. Continua*, 59(3), 787-804.
- Bekiryazıcı, Z. (2017). *Bazı kompartmanlı modellerin rastgele etkiler altında incelenmesi*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon, Türkiye.
- Bekiryazıcı, Z., Kesemen, T., & Merdan, M. (2017). Stochastic and random models of Malaria Disease with vertical transmission. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(1), 269-277.
- Bekiryazıcı, Z., Merdan, M., & Kesemen, T. (2018, November). Generalized beta parameters for a SVEIR-type random model of Polio transmission. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2037, No. 1, p. 020004). AIP Publishing LLC.
- Bekiryazıcı, Z., Merdan, M., & Kesemen, T. (2021). Modification of the random differential transformation method and its applications to compartmental models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 50(18), 4271-4292.
- Bekiryazıcı, Z., Merdan, M., Kesemen, T., & Najmuldeen, M. (2016). Mathematical modeling of dengue disease under random effects. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 4(2), 58-70.
- Bolarin, G. (2010). A Deterministic Mathematical Model of Measles in Newborn(s) using the MSEIR Endemic Model. *Nigerian Journal of Mathematics and Applications*, 20, 75-81.

- Casabán, M. C., Cortés, J. C., Navarro-Quiles, A., Romero, J. V., Roselló, M. D., & Villanueva, R. J. (2017). Computing probabilistic solutions of the Bernoulli random differential equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309, 396-407.
- Chung, K. L. (2012). *Elementary probability theory with stochastic processes*. Springer Science & Business Media.
- Cyganowski, S., Kloeden, P., & Ombach, J. (2001). *From elementary probability to stochastic differential equations with MAPLE®*. Springer Science & Business Media.
- Çapar, U. (2013). Ölçü kuramsal olasılık ve stokastik kalkülüse giriş (finans uygulamaları ile). ODTÜ Yayıncılık, Ankara.
- Danhaus, A. A., Daniel, E. E., Shawulu, C. J., & Daniel, O. E. (2021). An MSEIR Mathematical Model For The Transmission Dynamics Of Tuberculosis. *Innovative Journal of Science*, 3(3), 10-28.
- Das, K., Kumar, G. R., Reddy, K. M., & Lakshminarayan, K. (2021). Sensitivity and elasticity analysis of novel corona virus transmission model: A mathematical approach. *Sensors International*, 2, 100088.
- Dikmen, A. U., KINA, M. H., Özkan, S., & İlhan, M. N. (2020). COVID-19 epidemiyolojisi: Pandemiden ne öğrendik. *Journal of biotechnology and strategic health research*, 4, 29-36.
- Feng, T., & Qiu, Z. (2019). Global analysis of a stochastic TB model with vaccination and treatment. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 24(6), 2923.
- Forbes, C., Evans, M., Hastings, N. & Peacock, B. (2011). *Statistical distributions*. John Wiley & Sons.
- Gumel, A. B., McCluskey, C. C., & Watmough, J. (2006). An SVEIR model for assessing potential impact of an imperfect anti-SARS vaccine. *Mathematical Biosciences & Engineering*, 3(3), 485.
- İşsever, H., İşsever, T., & Öztan, G. (2020). Covid-19 Epidemiyolojisi. *Sağlık Bilimlerinde İleri Araştırmalar Dergisi*, 3(S1), 1-13.
- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115(772), 700-721.
- Khudair, A. R., Ameen, A. A., & Khalaf, S. L. (2011). Mean square solutions of second-order random differential equations by using variational iteration method. *Applied Mathematical Sciences*, 5(51), 2505-2519.
- Kim, J., Kwon, H. D., & Lee, J. (2016). Constrained optimal control applied to

- vaccination for influenza. *Computers & Mathematics with Applications*, 71(11), 2313-2329.
- Kuddus, M. A., Mohiuddin, M., & Rahman, A. (2021). Mathematical analysis of a measles transmission dynamics model in Bangladesh with double dose vaccination. *Scientific Reports*, 11(1), 1-16.
- Meester, M., Tobias, T. J., Bouwknegt, M., Kusters, N. E., Stegeman, J. A., & van der Poel, W. H. M. (2021). Infection dynamics and persistence of hepatitis E virus on pig farms—a review. *Porcine Health Management*, 7(1), 1-16.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T., & Khaniyev, T. (2017). Deterministic stability and random behavior of a Hepatitis C model. *PloS one*, 12(7), e0181571.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T., & Khaniyev, T. (2018). Analyzing the dynamics of Ebola transmission with random effects. *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, 2018, Article-ID 22.
- Merdan, M., & Khaniyev, T. (2008). On the behaviour of solutions under the influence of stochastic effect of Avian-Human influenza epidemic model. *International Journal of Biotechnology & Biochemistry*, 4(1), 75-101.
- Mummert, A., & Otunuga, O. M. (2019). Parameter identification for a stochastic SEIRS epidemic model: case study influenza. *Journal of Mathematical Biology*, 79(2), 705-729.
- Miao, A., Zhang, T., Zhang, J., & Wang, C. (2018). Dynamics of a stochastic SIR model with both horizontal and vertical transmission. *J. Appl. Anal. Comput*, 8(4), 1108-1121.
- Najmuldeen, M. S. N. (2016). *Dang humması hastalığının rastgele etkiler altında matematiksel modellenmesi* (Yayınlanamamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü/Matematik Anabilim Dalı).
- Nkamba, L. N., Ntaganda, J. M., Abboubakar, H., Kamgang, J. C., & Castelli, L. (2017). Global stability of a SVEIR epidemic model: application to poliomyelitis transmission dynamics.
- Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.
- Padgett, W. J., Schultz, G., & Tsokos, C. P. (1977). A random differential equation approach to the probability distribution of BOD and DO in streams. *Siam. Journal on Applied Mathematics*, 32(2), 467-483.
- Pishro-Nik, Hossein (2016). "Introduction to Probability, Statistics and Random Processes".
- Ross, R. (1915). Some a priori pathometric equations. *British medical journal*,

I(2830), 546.

- Schichl, H. (2004). Models and the history of modeling. In *Modeling languages in mathematical optimization* (pp. 25-36). Springer, Boston, MA.
- Shil, P., Gurav, Y. K., Chadha, M. S., & Mishra, A. C. (2011). Transmission dynamics of novel influenza A/H1N1 2009 outbreak in a residential school in India. *Current Science*, 1177-1183.
- Song, Y., Miao, A., Zhang, T., Wang, X., & Liu, J. (2018). Extinction and persistence of a stochastic SIRS epidemic model with saturated incidence rate and transfer from infectious to susceptible. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-11.
- Soong, T. T. (1973). *Random differential equations in science and engineering*.
- Stanescu, D., & Chen-Charpentier, B. M. (2009). Random coefficient differential equation models for bacterial growth. *Mathematical and Computer Modelling*, 50(5-6), 885-895.
- Wang, W., Cai, Y., Ding, Z., & Gui, Z. (2018). A stochastic differential equation SIS epidemic model incorporating Ornstein–Uhlenbeck process. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 509, 921-936.
- Zhao, Z. Y., Zhu, Y. Z., Xu, J. W., Hu, S. X., Hu, Q. Q., Lei, Z., ... & Chen, T. M. (2020). A five-compartment model of age-specific transmissibility of SARS-CoV-2. *Infectious diseases of poverty*, 9(1), 1-15.
- URL-1. Türkiye Cumhuriyeti Sağlık Bakanlığı Covid 19 Bilgilendirme Platformu. <https://covid19.saglik.gov.tr/TR-66337/genel-bilgiler-epidemioloji-ve-tani.html>, Son Erişim Tarihi: 04.04.2023.
- URL-2. <https://tr.wikipedia.org/wiki/COVID-19#Tan%C4%B1>. Son Erişim Tarihi: 04.04.2023.
- URL-3. <https://www.bbc.com/turkce/haberler-dunya-51864424>. Son Erişim Tarihi: 22.11.2021
- URL-4. Dünya Sağlık Örgütü Koronavirüs (COVID-19) Gösterge Tablosu. URL: <https://covid19.who.int/> Son Erişim Tarihi: 04.04.2023.
- URL-5. [https://www.who.int/news/item/05-05-2023-statement-on-the-fifteenth-meeting-of-the-international-health-regulations-\(2005\)-emergency-committee-regarding-the-coronavirus-disease-\(covid-19\)-pandemic](https://www.who.int/news/item/05-05-2023-statement-on-the-fifteenth-meeting-of-the-international-health-regulations-(2005)-emergency-committee-regarding-the-coronavirus-disease-(covid-19)-pandemic). Son Erişim Tarihi: 30.05.2023.