

OLASILIK

Ders Özetleri – 2022 Güz

İçerik

İçindekiler

İçerik	2
1. Temel Olasılık Kavramları ve Sayma Yöntemleri	3
2. Olasılığın Tanımı ve Olasılık Aksiyonları	4
3. Koşullu Olasılık, Parçalanış, Toplam Olasılık ve Bağımsız Olaylar	5
4. Bayes Teoremi	6
5. Rastgele Değişkenler ve Olasılık Dağılımları	7
6. Çok Boyutlu Rastgele Değişkenler	8
7. Rastgele Değişkenlerin Sayısal Özellikleri – I: Beklenen Değer	9
8. Rastgele Değişkenlerin Sayısal Özellikleri – II: Varyans ve Kovaryans	10
9. Rastgele Değişkenlerin Sayısal Özellikleri – III: Momentler	11
10. Bazı Olasılık Dağılımları – I: Kesikli Dağılımlar	12
11. Bazı Olasılık Dağılımları – II: Sürekli Dağılımlar	13
Kaynaklar	14

Olasılık Ders Notu Hakkında

Merhaba,

Bu ders notu 2022 Güz döneminde RTEÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yürütülmüş olan “MAT407 Olasılık” dersinin içeriğine uygun olarak öğrencilerin faydalanması adına hazırlanmıştır. Ders kapsamında kullanılan kaynaklar temel alınarak her başlıkla ilgili içerik bir sayfaya sığacak şekilde özetlenmeye çalışılmış, derste ayrıntılı olarak çözülen örnekler genelde sadece sonuçları ile verilmiştir. Ders notunu hazırlarken kullanılan kaynaklar son kısımda verilmiştir.

Ders notu ile ilgili yazım-içerik-bilimsel vb. hataları belirlemeniz durumunda zafer.bekiryazici@erdogan.edu.tr adresinden bana iletirseniz memnun olurum. İlerleyen süreçte olası hataların düzeltilmesi ile bu notun daha kapsamlı bir şekil almasını umuyorum.

Saygılarımla.

Dr. Zafer BEKİRYAZICI

1. Temel Olasılık Kavramları ve Sayma Yöntemleri

- Bir deneyin sonucu deneyden önce kesin bir şekilde belirlenemiyorsa bu deney “stokastik deney” olarak adlandırılır. Örnek olarak bir madeni paranın veya bir zarın atılması deneyleri verilebilir.
- Bir stokastik deneyin oluşabilecek tüm sonuçlarının kümesine “Örnek Uzay” denir. Örneğin zar atma deneyinde örnek uzay $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ şeklindedir.
- Örnek uzayın her elemanı bir “basit olay”, her alt kümesi bir “olay” olarak adlandırılır. Olasılık teorisindeki olay kavramı kümeler teorisindeki küme kavramına karşılık gelir. Örneğin evrensel küme (E) = kesin olay, boş küme ($\emptyset$) = imkânsız olay vb. Olayların incelenmesinde de küme işlemleri kullanılır.
- Örneğin bir zar atma deneyinde A olayı ve B olayı verilsin. Bu iki olayın aynı anda gerçekleşmesi kesişim, birinin ya da diğerinin gerçekleşmesi birleşim, birinin gerçekleşip diğerinin gerçekleşmemesi küme farkı ve olayın birinin tersinin gerçekleşmesi tümleyen işlemleri ile incelenir.
- De Morgan kuralları ve birden fazla küme üzerinde küme işlemleri de olay incelenmesinde kullanılır.
- İki işlem ele alınsın. Bu işlemler ayrık iken ilk işlem N_1 farklı şekilde ikinci işlem N_2 farklı şekilde gerçekleşiyorsa bu işlemlerin biri veya diğeri $N_1 + N_2$ farklı şekilde gerçekleşir. Ayrık olmamaları durumunda ise iki işlem birlikte $N_1 \cdot N_2$ farklı şekilde yapılır.
- Uygun durum sayısı hesaplanırken olası tüm durumların sayısından uygun olmayan durumların sayısı çıkarılarak da hesap yapılabilir.
- n nesnenin bir grubundan bir defada alınan r nesnenin bir sıralanmasına bu nesnelerin bir permütasyonu denir: $P_{n,r} = n!/(n-r)!$
- n nesnenin dairesel permütasyonu $(n-1)!$, n nesne içinde n_1 tanesi birbiriyle aynı, ..., n_k tanesi birbiriyle aynı elamanlar varsa tekrarlı permütasyon $n!/(n_1! \dots n_k!)$ olur.
- n nesne içinden bir defada r tanesinin düzenleme olmaksızın seçilmesine bu nesnelerin bir kombinasyonu denir: $C_{n,r} = n!/r!(n-r)!$
- Kombinasyon seçilen r nesnenin sıralanmalarını içermediğinden permütasyon ile kombinasyon arasında bu r nesnenin sıralanmalarının sayısı olan $r!$ kadar bir fark vardır: $P_{n,r} = r! C_{n,r}$
- $C_{n,r} = C_{n,n-r}$, $C_{n+1,r} = C_{n,r-1} + C_{n,r}$, $C_{n,0} + C_{n,1} + \dots + C_{n,n} = 2^n$
- Örneğin $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi için 3'lü kombinasyonların sayısı $C_{4,3} = 4$ iken 3'lü permütasyonların sayısı $P_{4,3} = 24$ olur.
- Bir A kümesindeki n farklı öğenin A_1 'de r_1 öğe, A_2 'de r_2 öğe, ..., A_k 'de r_k öğe ($r_1 + \dots + r_k = n$) olacak şekilde sıralı parçalanmalarının sayısı $n!/(r_1! \dots r_k!)$ iken sırasız parçalanmalarının sayısı grupların sıralamaları göz önüne alınmadan yapılır.
- Örneğin 12 öğrenci 4'erli gruplara $12!/(4!4!4!) = 34650$ farklı sıralama ile ayrılabilirken sıralama gözetmeksizin ayrılışların sayısı bu sayının $3!$ ile bölünmesi sonucu $34650/3! = 5775$ olur.
- Binom Teoremi: $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(a+b)^n = C_{n,0}a^n + C_{n,1}a^{n-1}b + \dots + C_{n,n-1}ab^{n-1} + C_{n,n}b^n$
- Örneğin $(2x-3y)^6$ ifadesinin açılımında x^3y^3 terimi $-4320x^3y^3$ olarak gelmektedir.

2. Olasılığın Tanımı ve Olasılık Aksiyonları

- Bir deney eşit olasılıklı N farklı sonuç verirse ve bu sonuçların M tanesi bir A olayına uygun ise A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A) = M/N$ şeklindedir.
- Örneğin tek bir zarın atılması deneyinde çift sayı elde edilmesi olayının olasılığı $1/2$ olur.
- Olasılık Aksiyomları: D bir deney ve S bu deneyin örnek olayı olsun. O haldeki S 'deki bir A olayının olasılığı $P(A)$ olasılığı ile ilgili aşağıdaki aksiyomlar doğrudur:
 - $P(A) \geq 0$
 - $P(S) = 1$
 - $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ bir S örnek uzayındaki sonlu ya da sayılabilir sonsuz sayıda ikişer ikişer ayrık olaylar olsunlar. Bu durumda $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ olur.
- Örneğin bir çift zarın toplamının 8 gelmesi olasılığı $5/36$ olur.
- Bazı Olasılık Kuralları: A, B ve $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ bir S örnek uzayındaki olaylar olsunlar.
 - $A_1 \subset A_2$ ise $P(A_1) \leq P(A_2)$
 - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 - $P(\emptyset) = 0$
 - $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 - $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$
- Örneğin bir paranın üç kez atılması deneyinde en az bir kez tura gelmesi olasılığı $7/8$ olur.
- Örneğin iki zarın bir kez atılışında toplamın 7 veya 10 gelmesi olasılığı $1/4$ olur.
- Örneğin 52 kartlık bir desteden rastgele bir kart seçildiğinde bu kartın as veya karo olmasının olasılığı $16/52$ olur.

	As	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Vale	Kız	Papaz
Sinek													
Karo													
Kupa													
Maça													

Kaynak: https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_52-card_deck

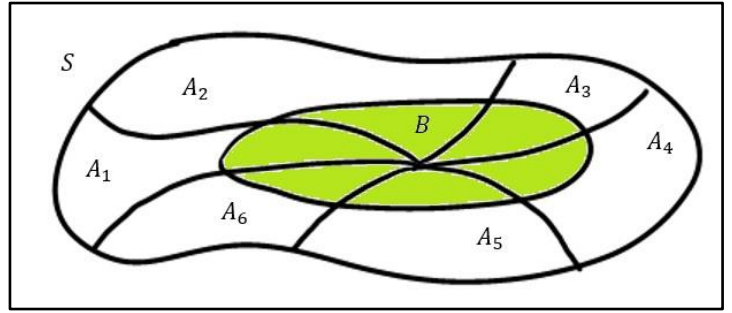
- Bir örnek uzay sonlu (veya sayılabilir sonsuz) sayıda eleman içeriyorsa kesikli, bir doğru parçası veya aralıktaki tüm noktaları içeriyorsa sürekli olarak adlandırılır. Kesikli uzayda $i = 1, 2, \dots, n$ için $\forall p_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ iken sayılabilir sonsuzlukta $i = 1, 2, \dots$ için $\forall p_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ olur.
- Sürekli örnek uzayda olayların olasılıkları uzunluk, alan ve hacim kullanılarak hesaplanır. Örneğin yüzeylerle üzerinde olasılık hesabı yapılırken $P(A) = \text{Alan}(A)/\text{Alan}(S)$ kullanılır.

Örneğin dairesel bir alana rastgele atılan bir dart bu alanı vurursa $1/4$ olasılıkla vurduğu nokta alanın kenarına oranla merkeze daha yakın olacaktır.

3. Koşullu Olasılık, Parçalanış, Toplam Olasılık ve Bağımsız Olaylar

- Bir B olayı bir A olayından sonra gerçekleşiyorsa A olayının gerçekleştiği biliniyorken B olayının gerçekleşme olasılığına koşullu olasılık denir ve $P(B|A)$ ile gösterilir: $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A)$
- Örneğin 52 kartlık bir desteden rastgele bir kart çekildiğinde A olayı kartın maça olması, B olayı kartın siyah olması ise B olayının gerçekleştiği biliniyorken A olayının olasılığı $P(A|B) = 1/2$ olur.
- S örnek uzayındaki iki olay A ve B olsun.
 - $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ ve $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A)$
 - Bu durumda $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$
 - $P(A|A) = 1$
- $P(A|B)$ olasılığı incelenirken $A \cap B$ istenen olay, B ise indirgenmiş örnek uzay gibi düşünülür.
- **Teorem:** $A_1, A_2, \dots, A_n$ olayları bir deneyin örnek uzayı S 'de iseler
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$
- Örneğin bir fabrikada üretilen parçalardan kusursuz 40 ve kusurlu 10 tanesi bir depoya koyuluyor. Yerine koyulmaksızın iki parça çekildiğinde ikisinin de kusurlu olma olasılığı $9/245$ olur.

Tanım: $A_1, A_2, \dots, A_n$ olayları için $S = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ şartları sağlanıyor ise A_i olaylarına S örnek uzayının bir parçalanışı denir. $P(A_i) > 0$ şartı sağlanır ve bir olay gerçekleştiğinde yalnız bir A_i gerçekleşir.



Şekil-1: S örnek uzayının $n = 6$ parçaya ayrılışı

- Örneğin bir zarın atılması deneyinde $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ için $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3,4,5\}, A_3 = \{6\}$ örnek uzayın bir parçalanışdır.
- **Teorem:** $A_1, \dots, A_n$ sonlu bir S örnek uzayının parçalanıştıysa $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$ olur.
- **Teorem:** Aynı parçalanışla herhangi bir $B \subset S$ olayı için $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$ olur.
- Örneğin bir torbada 4 beyaz ve 3 siyah top, ikincideyse 3 beyaz ve 5 siyah top varken ilk torbadan bir top rengine bakılmadan ikinciye atılıyor. İkinci torbadan siyah top çekilme olasılığı $38/63$ olur.
- **Tanım:** Bir olayın elde edilmesi diğer bir olayın gerçekleşme olasılığını etkilemiyorsa bu iki olay bağımsızdır denir. Bağımsız olaylar için $P(B|A) = P(B)$ olur.
- **Tanım:** A ve B olaylarının bağımsız olması için g.y.k. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ olmasıdır.
- **Teorem:** A ve B ($P(A), P(B) \neq 0$) bağımsız olaylar iseler $A \cap B \neq \emptyset$.
- Örneğin iki zarın tek bir atılışında iki birli gelmesi olasılığı $1/36$ olur.
- A ve B bağımsız olaylar iseler $P(A \cup B) = P(A) + P(B)P(\bar{A}) = P(B) + P(A)P(\bar{B})$ olur.
- **Teorem:** A ve B olayları için $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ ise bu olaylar bağımsız değildirler. Ayrıca A ve B bağımsız iseler A ve $\bar{B}, \bar{A}$ ve $B, \bar{A}$ ve $\bar{B}$ olayları da bağımsızdırlar.
- $A_1, A_2, \dots, A_n$ olayları $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$ ise bağımsızdırlar.
- m olayın “tam bağımsız” olması bir defada alınan herhangi sayıdaki olayların bağımsız olmasıdır.

4. Bayes Teoremi

- Teorem:** $A_1, A_2, \dots, A_n$ olayları $i = 1, 2, \dots, n$ için $P(A_i) \neq 0$ olacak şekilde bir S örnek uzayının bir parçalanışı iseler ve S içinde $P(A) \neq 0$ olacak şekilde herhangi bir B olayı ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

olur. Teorem eşdeğer olarak $P(A_r|B) = P(A_r)P(B|A_r)/P(B)$ şeklinde de ifade edilebilir.

- İspat:**

- Koşullu olasılık tanımından $P(A_r|B) = \frac{P(A_r \cap B)}{P(B)}$ olur.
- $A_1, A_2, \dots, A_n$ bir parçalanış olduğundan $P(A_r|B) = \frac{P(A_r \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_r \cap B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$ yazılabilir.
- Koşullu olasılık tanımından $P(A_r|B) = \frac{P(A_r \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_r \cap B)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$ olur.

- Örnek:** Bir sigorta şirketi müşterileri kazaya yatkın olanlar ve yatkın olmayanlar şeklinde sınıflara ayırarak sözleşme imzalamaktadır. Şirket araştırmaları kazaya yatkın insanların bir yıllık süreçte %40 olasılıkla kaza geçirdiğini, kazaya yatkın olmayanların ise aynı süreçte %20 olasılıkla kaza geçirdiklerini belirtmektedir. Nüfusun %30 oranında kazaya yatkın olduğu kabul edilmektedir. Bir sigortalı bir yıllık süreçte bir kaza geçirdiyse bu sigortalının kazaya yatkın olmasının olasılığı nedir?

- Çözüm:** Bayes Kuralı: $P(A_r|B) = P(A_r)P(B|A_r)/P(B)$

B : “Sigortalının kaza geçirmesi”

İlgilenilen olasılık sigortalının kaza geçirmiş

A_1 : “Kişinin kazaya yatkın olması” $\Rightarrow P(A_1) = 0.3$

olması durumunda (B) iken kazaya yatkın

A_2 : “Kazaya yatkın olmaması” $\Rightarrow P(A_2) = 0.7$

biri olması: $P(A_1|B)$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)}$$

Pay kısmında ilgilenilen olasılık: Kişinin kazaya yatkın olması ($P(A_1) = 0.3$) ve kazaya yatkın olduğu biliniyorken kaza yapması ($P(B|A_1) = 0.4 \Rightarrow P(A_1)P(B|A_1) = 0.12$

Payda kısmında kaza için toplam olasılık: $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = 0.12 + 0.14$

$$\Rightarrow P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{0.12}{0.12 + 0.14} = \frac{6}{13}$$

- Örnek:** Bir cüzdanda üç tane bozuk para vardır. İki normal iken üçüncünün her iki yüzü de yazıdır. Rastgele çekilen bir para dört defa atılıyor. Dört defada da yazı gelirse bunun üçüncü paradan gelmesi olasılığı $8/9$ olur.
- Örnek:** A , B ve C makineleri bir fabrikadaki ürünlerin sırasıyla %50, %30 ve %20 kadarını üretmektedir. Bu makineler sırasıyla %3, %4 ve %5 oranlarında hatalı ürün üretmekte iseler seçilen hatalı bir ürünün A makinesinde üretilmiş olması olasılığı $15/37$ olur.
- Örnek:** İki kavanoz K_1 ve K_2 olarak adlandırılınsınlar. K_1 ’de 1 beyaz ve 2 siyah top varken K_2 ’de 2 beyaz ve 3 siyah top bulunmaktadır. K_1 ’den çekilen bir top K_2 ’ye konduktan sonra K_2 ’den bir top çekiliyor. K_2 ’den çekilen top siyah ise K_1 ’den çekilen topun beyaz olması olasılığı $3/11$ olur

5. Rastgele Değişkenler ve Olasılık Dağılımları

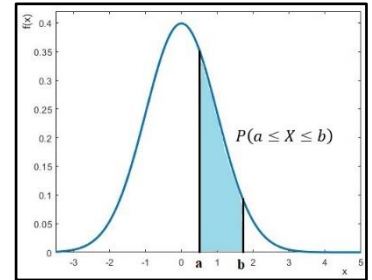
- Bir örnek uzaydaki rastgele olaylara sayısal değerler atayan bir fonksiyona “rastgele değişken” denir.
 - $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun aldığı değerlerin kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda elemana sahipse rastgele değişkene “kesikli”, bir veya birden fazla aralıktaki tüm değerleri alabiliyorsa ise “sürekli” denir.
 - Rastgele değişkenler X, Y, Z gibi büyük, aldıkları değerler ise x, y, z gibi küçük harflerle gösterilir.
 - Tanım:** Bir kesikli rastgele değişkenin alabileceği değerleri alma olasılıklarını gösteren fonksiyona “olasılık fonksiyonu” denir: $f(x) = P(X = x)$.
 - Örneğin bir madeni paranın üç kez atılması deneyinde gelen tura sayısını gösteren rastgele değişkeni $X: S \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu deneyde paranın üç kez yazı gelmesi durumunda $X = 3$ olur ve bu durumun olasılığı $1/8$ olduğundan $f(3) = P(X = 3) = 1/8$ yazılır. Tüm durumlar
- | | | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|
| $X = x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x) = P(X = x)$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 |
- Tanım:** X sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ değerlerini $i = 1, 2, \dots, N$ için $f(x_i) = P(X = x_i)$ olasılıklarıyla alabilen bir kesikli rastgele değişken ise aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir: i) $\forall i = 1, 2, \dots, N$ için $f(x_i) \geq 0$, ii) $\sum_{i=1}^N f(x_i) = 1$.
 - X rastgele değişkeni sayılabilir sonsuz sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$ alabilen kesikli rastgele değişken ise olasılık fonksiyonu $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x_i) \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$ şartlarını sağlar.
 - Tanım:** Bir rastgele değişkenin değerinin bir x değerinden eşit veya küçük olması olasılığını gösteren fonksiyon $F(x)$ ile gösterilir ve “birikimli dağılım fonksiyonu” olarak adlandırılır: $F(x) = P(X \leq x)$.
 - Örneğin bir düzgün altı yüzlü zarın bir kez atılması deneyinde üst yüzde gelen sayıyı gösteren X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(x) = j/6, j \leq x < j + 1, j = 1, 2, \dots, 5$ ile gösterilebilir. Bu deney için $x < 1$ iken $F(x) = 0$ ve $x \geq 6$ iken $F(x) = 1$ olur.

Tanım: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ aralığında değerler alabilen bir X sürekli rastgele değişkeninin $f(x)$ “olasılık yoğunluk fonksiyonu” i) $f(x), x \in \mathbb{R}$, ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ şartlarını sağlar.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$x = c, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P(X = c) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$



- X sürekli rastgele değişkeninin $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunun eğrisinin altında kalan alan 1 olur.
- Örneğin X için $f(x) = 1 - x/2, 0 < x < 2$ ise $P(0 < X \leq 1) = 3/4$ ve $P(1 \leq X \leq 2) = 1/4$ olur.
- Örneğin X için $f(x) = c(4x - 2x^2), 0 < x < 2$ ise $c = 3/8$ olur.
- Tanım:** Bir sürekli rastgele değişkenin “dağılım fonksiyonu” $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$ olarak tanımlanır. Dağılım fonksiyonu azalmayan bir fonksiyondur: $x_1 < x_2$ için $F(x_1) \leq F(x_2)$ olur.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ olur.
- $f(x) = dF(x)/dx$ özelliği sağlanır ve dolayısıyla $a \leq b$ için $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ sağlanır.
- Örneğin X için ise $f(x) = e^{-kx}, x > 0$ için $k = 1$ olur ve $F(x) = 1 - e^{-x}$ bulunur.
- Örneğin X için $F(x) = (x^2 - x)/30, 1 \leq x \leq 4$ ise $P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = 2/15$ bulunur.

6. Çok Boyutlu Rastgele Değişkenler

- Bir deneye ilişkin birçok rastgele değişkenin aynı andaki durumu incelenmesi gerekebilir.
- Örneğin bir paranın üç kez atılmasında X rastgele değişkeni gelen tura sayısını gösterirken Y rastgele değişkeni ilk iki atışta gelen tura sayısını gösterebilir.
- Tanım:** (X, Y) sıralı ikilisi bir S örnek uzayında tanımlanan iki boyutlu kesikli rastgele değişken olsun. (X, Y) rastgele değişkeninin tüm $(x_i, y_j), i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$ değerleri için $f(x_i, y_j) = f_{XY}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ fonksiyonuna X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu denir. Bu fonksiyon i) $\forall(i, j)$ için $f(x_i, y_j) \geq 0$ ve ii) $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) = 1$ şartlarını sağlar.
- Tanım:** (X, Y) rastgele değişkeninin ortak olasılık fonksiyonunda X rastgele değişkeni için Y rastgele değişkeninin değişimine göre oluşan $f(x_i, y_j)$ olasılıklarının toplamaları ile $f(x_i) = f_X(x_i)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin “marjinal olasılık fonksiyonu” denir. Aynı şekilde Y rastgele değişkeni için de $f(y_j) = f_Y(y_j)$ marjinal olasılık fonksiyonu hesaplanır.

$$f(x_i) = f_X(x_i) = \sum_{j=1}^N f(x_i, y_j) \text{ ve } \sum_{i=1}^M f(x_i) = 1$$

$$f(y_j) = f_Y(y_j) = \sum_{i=1}^M f(x_i, y_j) \text{ ve } \sum_{j=1}^N f(y_j) = 1$$

- Örneğin bir kutuda 3 beyaz, 2 siyah ve 4 kırmızı top olsun. Kutudan iki top seçildiğinde beyaz topların sayısı X , siyah topların sayısı Y olsun. Ortak olasılık fonksiyonu $f(x, y) = \binom{3}{x} \binom{2}{y} \binom{4}{2-x-y} / \binom{9}{2}$ olarak bulunur. Marjinal olasılık fonksiyonları ise aşağıdaki gibidir.

X	0	1	2
$f(x)$	15/36	18/36	3/36

Y	0	1	2
$f(y)$	21/36	14/36	1/36

- Örneğin bir para üç kez atıldığında X rastgele değişkeni gelen tura sayısını belirtirken Y rastgele değişkeni kazanımı belirtmektedir. Kazanç ilk atışta tura gelirse 1₺, ilk tura ikinci atışta gelirse 2₺, ilk tura üçüncü atışta gelirse 3₺ iken hiç tura gelmezse 1₺ kaybedilmektedir. Bu durumda marjinal fonksiyonlar:

X	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Y	-1	1	2	3
$f(y)$	1/8	4/8	2/8	1/8

- Tanım:** (X, Y) sürekli rastgele değişken ikilisi için aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonuna (X, Y) için “ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu” denir. Bu fonksiyon i) $\forall(x, y)$ için $f(x, y) \geq 0$ ve ii) $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dy dx = 1$ şartlarını sağlar.
- Örneğin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y) = x^2 + xy/3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ şeklinde verilen (X, Y) değişkeni için $P(X < 1/2, Y > 1) = 5/48, P(1 \leq Y \leq 2) = 7/12$ ve $P(X + Y \geq 1) = 65/72$ olur.
- Örneğin $f(x, y) = k(x^2 - y), 1 < x < 3, 0 < y < 1$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $k = 3/23$ olur.
- Tanım:** (X, Y) iki boyutlu rastgele değişkeninin “ortak dağılım fonksiyonu” $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ ile tanımlanır. Bu fonksiyon $\partial^2 F / \partial x \partial y = f(x, y)$ bağıntısı ile ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu verir.
- Tanım:** İki boyutlu (X, Y) sürekli rastgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ ile $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ ve $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları elde edilir.
- Örneğin $f(x, y) = x^2 + xy/3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ olasılık yoğunluk fonksiyonu için marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları $g(x) = 2x^2 + 2x/3, 0 \leq x \leq 1$ ve $h(y) = y/6 + 1/3, 0 \leq y \leq 2$ şeklindedir.

7. Rastgele Değişkenlerin Sayısal Özellikleri – I: Beklenen Değer

- Rastgele değişkenlerin olasılık dağılımları kadar bazı özelliklerini veren sayısal karakteristikleri de incelenir.
- Tanım:** X rastgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$ şeklinde verilmiş olsun.

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} xf(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

sayısına X rastgele değişkeninin beklenen değeri (beklentisi) denir.

- Örneğin, düzgün bir altı yüzlü zar atıldığında üst yüzde gelen sayının beklenen değeri $7/2$ olur.
- Örneğin, 3 beyaz ve 2 siyah top bulunan bir kavanozdan iadeli olarak 2 top çekilecektir. Çekilen her beyaz top için 100 ₺ kazanılacak iken her siyah top için 50 ₺ kaybedilecek ise kazanç/kayıp beklentisi +80 ₺ olur.
- Örneğin X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = 3/x^4, x \geq 1$ ise $E(X) = 3/2$.
- Örneğin X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = e^{-x}, x \geq 0$ ise $E(X) = 1$.
- Bir X rastgele değişkeni için $Y = g(X)$ rastgele değişkenin beklenen değeri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E(Y) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} g(x)f(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

- Örneğin X rastgele değişkeni bir paranın üç kez atılması deneyinde turların sayısını gösterebilir. Bu durumda $E(X) = 3/2, E(3X + 5) = 76/8, E(X^2) = 24/8$ olur.
- Teorem:** $a, b \in \mathbb{R}$ için $E(aX + b) = aE(X) + b$ olur.
- Not:** $E(X^2) \neq (E(X))^2$ ve $E(1/X) \neq 1/E(X)$.
- Örneğin X için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = x^2/3, -1 < x < 2$ ise $E(4X + 3) = 8$ olur.
- Tanım:** (X, Y) iki boyutlu rastgele değişkeninin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x, y)$ ise beklenti:

$$E(H(X, Y)) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} H(x, y)f(x, y), & X \text{ ve } Y \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y)f(x, y)dydx, & X \text{ ve } Y \text{ sürekli} \end{cases}$$

- Teorem:** X ve Y beklenen değerleri $E(X)$ ve $E(Y)$ olan rastgele değişkenler iseler $E(XY) = E(X)E(Y)$ olması durumunda bağımsızdır denir ve bu durumda $E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$ de sağlanır. X, Y bağımsız iseler $E(XY) = E(X)E(Y)$ olur ancak $E(XY) = E(X)E(Y)$ olması bağımsızlığı garantilemez.
- Not:** Bu sonuçların ikiden fazla sayıdaki rastgele değişkene uygulanması da mümkündür. Örneğin $X_1, \dots, X_N$ rastgele değişkenleri için $H(X_1, \dots, X_N) = X_1 + \dots + X_N$ ise $E(X_1 + \dots + X_N) = E(X_1) + \dots + E(X_N)$ olur.
- Örneğin X ve Y rastgele değişkenleri için ortak olasılık fonksiyonu $f(x, y) = 1/2, x = 3, y = 5$ ise, $f(x, y) = 1/6, x = 3, y = 9$ ise, $f(x, y) = 1/6, x = 6, y = 3$ ise ve $f(x, y) = 1/6, x = 6, y = 9$ ise şeklinde tanımlansın. Bu durumda $E(X) = 4, E(Y) = 19/3$ ve $E(XY) = 26$ olur. $E(XY) \neq E(X)E(Y)$ olduğundan bu iki rastgele değişken bağımsız değildir.

8. Rastgele Değişkenlerin Sayısal Özellikleri – II: Varyans ve Kovaryans

- Beklenen değer rastgele değişkenlerin değerlerinin dağılımının merkezi hakkında bilgi verirken varyans bu değerlerin merkez etrafında dağılımlarının ölçümüdür.
- Tanım:** X rastgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$, beklenen değeri $\mu = E(X)$ olsun.

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

sayısına X rastgele değişkeninin varyansı denir. $\sigma^2 = Var(X) = E((X - \mu)^2)$ olarak gösterilir.

- Tanım:** Bir rastgele değişkenin varyansının karekökü bu değişkenin standart sapması (σ) olarak adlandırılır.
- Örneğin bir paranın üç kez atılması deneyinde gelen tura sayısının standart sapması $\sigma = \sqrt{3}/2$ olur.
- Teorem:** $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- Örneğin, 1'den N 'e kadar numaralı N top içinden çekilecek sayı için $E(X) = \frac{N+1}{2}$, $Var(X) = \frac{N^2-1}{12}$ olur.
- Örneğin, X rastgele değişkeni için $f(x) = x, x \in (0,1)$ ve $f(x) = 2 - x, x \in [1,2)$ ise $Var(X) = 1/6$ olur.
- Teorem:** $a, b \in \mathbb{R}$ için $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ olur.
- Tanım:** X ve Y rastgele değişkenlerinin kovaryansı $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ olarak tanımlanır. Kovaryans iki rastgele değişkenin birbiri ile ilişkisinin ölçümüne imkân verir.
- Tanımdan elde edilen $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ ile bağımsızlık incelenir. X ve Y rastgele değişkenlerinin bağımsız olmaları durumunda $E(XY) = E(X)E(Y)$ olacağından $Cov(X, Y) = 0$ olur.
- X ve Y bağımsız iseler $Cov(X, Y) = 0$ olur ancak $Cov(X, Y) = 0$ ise değişkenler bağımsız olmayabilirler.
- Örneğin X ve Y rastgele değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonu

X, Y	-1	0	1	$f(x)$
-1	1/16	3/16	1/16	5/16
0	3/16	0	3/16	6/16
1	1/16	3/16	1/16	5/16
$f(y)$	5/16	6/16	5/16	1

şeklinde ise $Cov(X, Y) = 0$ ancak $f(X = 0)f(Y = 0) \neq f(X = 0, Y = 0)$ olduğu için bağımsız değildirler.

- Teorem:** $X_1, X_2, \dots, X_N$ bağımsız ve varyansları $\sigma_i^2, i = \overline{1, N}$ ise $Var(\sum_{i=1}^N X_i) = \sum_{i=1}^N Var(X_i)$ olur.
- X ve Y rastgele değişkenleri bağımsız iseler $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$ olacaktır. Genel durumda $a, b \in \mathbb{R}$ için $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y)$ olur.
- Tanım:** X ve Y rastgele değişkenlerinin varyansları sırasıyla $Var(X)$ ve $Var(Y)$ ise bu iki değişken arasındaki korelasyon $\rho_{XY} = Cov(X, Y) / \sqrt{Var(X)Var(Y)}$ olarak tanımlanır.
- Korelasyon iki rastgele değişken arasındaki doğrusal ilişkinin tipini ve gücünü inceleme imkanı sunar.
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ aralığında tanımlı Pearson korelasyon katsayısı $\rho_{XY} = -1$ için çok güçlü negatif doğrusal ilişkiyi ve $\rho_{XY} = 1$ için çok güçlü pozitif doğrusal ilişkiyi gösterir.
- Örneğin X ve Y için $f(x, y) = c(x + y), x \in (0,2), y \in (0,2)$ ise $c = 1/8$ ve $Cov(X, Y) = -1/36$ olur. Korelasyon katsayısı ise $\rho_{XY} = -1/11$ olarak elde edilir.

9. Rastgele Değişkenlerin Sayısal Özellikleri – III: Momentler

- Momentler bir rastgele değişkenin dağılımı hakkında bilgiler veren sayısal özelliklerinin genelidir.
- Tanım: X rastgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$ olsun.

$$E(X^k) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} x^k f(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

sayısına X rastgele değişkeninin “ k -ıncı (sıfıra göre veya başlangıç) momenti” denir ve m_k ile gösterilir.

- $k = 1$ için $m_1 = E(X)$ beklenen değeri verir. Beklenen değer özellikleri ile $E((aX)^k) = a^k E(X^k)$ bulunur.
- Tanım: X rastgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$ olsun.

$$E((X - c)^k) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} (x - c)^k f(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^k f(x) dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

sayısına X rastgele değişkeninin “ c sabitine göre k -ıncı momenti” denir.

- Burada $c = \mu$ olması durumunda $\mu_k = E((X - \mu)^k)$ sayısına “ k -ıncı merkezi moment” denir.
- $k = 2$ için $\mu_2 = E((X - \mu)^2)$ rastgele değişkenin varyansını verir.
- Rastgele değişkenler “ k -ıncı mutlak merkezi moment” olan $E((|X - \mu|)^k)$ sayısı ve “ k -ıncı faktoriyel momenti” $E(X \cdot (X - 1) \cdot \dots \cdot (X - (k - 1)))$ sayısı gibi farklı momentleri ile de inceleme yapılmaktadır.
- Tanım: X rastgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$ olsun. $t < |h|$ için

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} e^{tx} f(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

beklenen değeri varsa, X rastgele değişkeninin “moment çıkaran fonksiyonu” olarak adlandırılır.

- Örneğin X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = e^{-x}, x > 0$ ise $M_X(t) = \frac{1}{1-t}, t < 1$.
- Örneğin X rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{8} \binom{3}{x}, x = 0, 1, 2, 3$ ise $M_X(t) = \frac{1}{8}(e^t + 1)^3$.
- Teorem: $a, b \in \mathbb{R}$ ise i) $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$, ii) $M_{bX}(t) = M_X(bt)$, iii) $M_{(X+a)/b}(t) = e^{at/b} M_X(t/b)$ olur.
- Eğer varsa, $M_X(t)$ ile dağılımın parametreleri belirlenebildiğinden bu fonksiyon ile dağılım tanımlanabilir.
- Tanım: X rastgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$ olsun.

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \sum_{x \in R_X} e^{itx} f(x), & X \text{ kesikli} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, & X \text{ sürekli} \end{cases}$$

beklenen değeri, X rastgele değişkeninin “karakteristik fonksiyonu” olarak adlandırılır.

- $E(e^{itX}) = E(\cos tX) + iE(\sin tX)$ olur.
- Bir rastgele değişkenin karakteristik fonksiyonu biliniyorsa dağılım fonksiyonu belirlenebilir. Rastgele değişkenlerin moment çıkaran fonksiyonları her zaman olmayabilse de karakteristik fonksiyonları vardır.
- Yüksek momentler ile rastgele değişkenlerin farklı özellikleri de incelenebilir. olsun.
- $\sigma^2 = \text{Var}(X), \mu = E(X)$ için $\text{skew}(X)$ sayısı ile verilen çarpıklık katsayısı olasılık yoğunluk fonksiyonunun simetrikliğinin incelenmesinde kullanılır. $\text{kurt}(X)$ sayısı ile verilen basıklık katsayısı ise olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğinin normal yoğunluk fonksiyonunun grafiğine göre basıklık/sivriliğini verir.

$$\text{skew}(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right), \quad \text{kurt}(X) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right) - 3.$$

10. Bazı Olasılık Dağılımları – I: Kesikli Dağılımlar

İncelenen olayların sonuçları kesikli (sayılabilir sayıda değer alabilen) bir değişken ile gösterilebiliyorsa, bu sonuçların olasılıkları bir olasılık fonksiyonu ile gösterilir. Özel olasılık fonksiyonlarından oluşan ve uygulamada sıklıkla karşılaşılan bazı dağılımlar aşağıda verilmektedir.

Olasılık Fonksiyonu	Açıklama	Karakteristikler
1. (Kesikli) Düzgün Dağılım		
$f(x) = \frac{1}{n}$ $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	Kesikli düzgün dağılım, olası değerlerini eşit olasılıkla aldığı dağılımdır. $X \sim U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterilir ($n \in \mathbb{N}$).	$E(X) = (n + 1)/2$ $Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$
2. Bernoulli Dağılımı		
$f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ q, & x = 0 \end{cases}$ $R_X = \{0, 1\}$	Bernoulli deneyleri ile ilgili olan bu dağılım iki olası sonucu olan olaylarda kullanılır. Deney için başarı ($x = 1$) olasılığı $p \in (0, 1]$ ve başarısızlık olasılığı $q = 1 - p$ ile verilir.	$E(X) = p$ $Var(X) = pq$ $M_X(t) = q + pe^t, t \in \mathbb{R}$
3. Binom Dağılımı		
$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $R_X = \{0, 1, \dots, n\}$	Binom dağılımı, bağımsız $n \in \mathbb{N}$ adet Bernoulli deneyindeki başarı sayısının olasılık dağılımıdır. $X \sim B(n, p)$ ile gösterilir.	$E(X) = np$ $Var(X) = npq$ $M_X(t) = (q + pe^t)^n, t \in \mathbb{R}$
4. Geometrik Dağılım		
$f(x) = pq^{x-1}$ $R_X = \{1, 2, \dots\}$	Geometrik dağılım, bağımsız Bernoulli deneylerinde ilk başarıyı elde edene kadar yapılması gereken deneme sayısının olasılık dağılımıdır. $X \sim Geo(p)$ ile gösterilir.	$E(X) = 1/p$ $Var(X) = q/p^2$ $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}, qe^t < 1$
5. Negatif Binom Dağılımı		
$f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$ $R_X = \{k, k+1, \dots\}$	Negatif Binom (veya Pascal) dağılımı, bağımsız Bernoulli deneylerinde k -ıncı başarıyı elde edene kadar yapılması gereken deneme sayısının olasılık dağılımıdır. $X \sim NB(k, p)$ ile gösterilir.	$E(X) = k/p$ $Var(X) = kq/p^2$ $M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^k, qe^t < 1$
6. Hipergeometrik Dağılım		
$f(x) = \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $R_X = \{0, 1, \dots, n\}$	Hipergeometrik dağılım, N_1 ve N_2 elemanlı iki grup öğeden oluşan $N_1 + N_2 = N$ elemanlı bir kitleden toplam n elemanlı bir örneklem seçiminde bir gruptan gelen eleman sayısının olasılık dağılımıdır. $X \sim Hypergeometric(N, N_1, n)$ denir.	$E(X) = \frac{nN_1}{N}$ $Var(X) = \frac{nN_1}{N} \frac{N - n}{N - 1} \left(1 - \frac{N_1}{N} \right)$
7. Poisson Dağılımı		
$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ $R_X = \{0, 1, \dots\}$	Poisson dağılımı, belirli bir zaman aralığı veya alanda bir olayın gerçekleşme sayısının olasılık dağılımıdır. Olayın belirli bir $\lambda > 0$ ortalaması ile gerçekleştiği ve gerçekleşmenin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. $X \sim Poisson(\lambda)$ ile gösterilir.	$E(X) = \lambda$ $Var(X) = \lambda$ $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, t \in \mathbb{R}$

11. Bazı Olasılık Dağılımları – II: Sürekli Dağılımlar

İncelenen olayların sonuçları bir aralıktaki tüm değerleri alabilen bir değişken ile gösterilebiliyorsa, bu sonuçların olasılıkları bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ile gösterilir. Özel olasılık yoğunluk fonksiyonlarından oluşan ve uygulamada sıklıkla karşılaşılan bazı dağılımlar aşağıda verilmektedir.

1. **(Sürekli) Düzgün Dağılım:** $f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$.

$X \sim U(a, b)$ ile gösterilir.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b, M_X(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}, t > 0.$$

$a = 0$ ve $b = 1$ için standart düzgün dağılım olarak adlandırılır.

2. **Üstel Dağılım:** $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$.

$X \sim Exp(\lambda)$ ile gösterilir.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0, M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}, t < \lambda.$$

3. **Gamma Dağılımı:** $f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, x > 0$.

$\Gamma(r)$ ile Gamma fonksiyonu gösterilmektedir.

$X \sim \Gamma(\alpha, r)$ ile gösterilir.

$$E(X) = \frac{r}{\alpha}, Var(X) = \frac{r}{\alpha^2}.$$

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r, t < \alpha.$$

4. **Beta Dağılımı:** $f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{(\alpha-1)} (1-x)^{(\beta-1)}, 0 < x < 1$.

$B(\alpha, \beta)$ ile Beta fonksiyonu gösterilir.

$X \sim B(\alpha, \beta)$ ile gösterilir.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

$x \in (0,1)$ için “standart”, $x \in (c, c+d)$ için “genelleştirilmiş” Beta dağılımı olarak adlandırılır.

5. **Normal Dağılım:** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

Gauss dağılımı olarak da bilinir (Bkz. Carl Friedrich Gauss)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir.

$$E(X) = \mu, Var(X) = \sigma^2.$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt, M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, t \in \mathbb{R}.$$

$\mu = 0, \sigma = 1$ için “standart” normal dağılım olarak adlandırılır.

Kaynaklar

1. Fikri Akdeniz, Olasılık ve İstatistik, 19. Baskı, Akademisyen Kitabevi, Adana, 2014.
2. Seymour Lipschutz, Marc Lipson, Olasılık - Schaum Serisi, Çeviri Editörü: Tahir Khaniyev, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2013.
3. Tahir Khaniyev, İhsan Ünver, Zafer Küçük, Tülay Kesemen, Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2017.
4. Sheldon M. Ross, Olasılık ve İstatistiğe Giriş – Mühendisler ve Fenciler için, Çeviri Editörleri: Salih Çelebioğlu, Reşat Kasap, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2012.
5. Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, Keying Ye, Probability & Statistics for Engineers and Scientists, Pearson, England, 2016.
6. Tamilla Nasirova, Tahir Khaniyev, Cemil Yapar, İhsan Ünver, Zafer Küçük, Olasılık, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, Trabzon, 2009.
7. Douglas C. Montgomery, George C. Runger, Mühendisler için Uygulamalı İstatistik ve Olasılık, Çeviri Editörler: Mehmet Terziler, Tahsin Öner, Esra Dalan Yıldırım, Şule Ayar Özbal, Palme Yayınevi, Ankara, 2019.
8. Sheldon Ross, A First Course in Probability, Pearson, England, 2014.
9. Richard L. Scheaffer, James T. McClave, Probability and Statistics Engineers, Duxbury Press, 1995.
10. Jean Jacod, Probability Essentials, Springer, Berlin, 2004.
11. URL-1, Ankara Üniversitesi Açık Ders Malzemeleri – İST 101 Olasılık ve İstatistik, Son Erişim Tarihi: 11/04/2023, <https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=6089>
12. URL-2, Probability, Mathematical Statistics, Stochastic Processes, Son Erişim Tarihi: 11/04/2023, <https://www.randomservices.org/random/index.html>.
13. Catherine Forbes, Merran Evans, Nicholas Hastings, Brian Peacock, Statistical Distributions, John Wiley & Sons, New Jersey, 2011.
14. William Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, Wiley, New York, 1968.