

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Ders Özetleri / 2019 – 2023

İçerik

İçindekiler

İçerik	2
1. Diferansiyel Denklemler ile ilgili Temel Kavramlar	3
2. Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler	4
3. Homojen Diferansiyel Denklemler	5
4. Tam Diferansiyel Denklemler	6
5. İntegrasyon Çarpanı	7
6. Lineer Diferansiyel Denklem	8
7. Bernoulli ve Riccati Diferansiyel Denklemleri	8
8. Yüksek Dereceli Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler	9
9. Devre Uygulamaları – I: RL-RC Devreleri	10
10. Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denklemler	11
11. Belirsiz Katsayılar Yöntemi	12
12. Cauchy-Euler & Legendre Diferansiyel Denklemleri	13
13. Değişken Katsayılı Lineer Homojen DD & Mertebe Düşürme Yöntemi	14
14. Devre Uygulamaları – II: RLC Devresi	15
15. Parametrelerin Değişimi Yöntemi	16
16. Laplace Dönüşümü	17
17. Seri Yönteminin Temelleri	18
18. Bazı Sayısal Yöntemler	19
Kaynaklar	20

Diferansiyel Denklemler Ders Notu Hakkında

Merhaba,

Bu ders notu 2019-2023 yıllarında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi ve İbn Haldun Üniversitesi kurumlarının farklı birimlerinde yürütülmüş olan Diferansiyel Denklemler derslerinin içeriğine uygun olarak öğrencilerin faydalanması adına hazırlanmıştır. Ders kapsamında kullanılan kaynaklar temel alınarak her başlıkla ilgili içerik bir sayfaya sığacak şekilde özetlenmeye çalışılmış, derste ayrıntılı olarak çözülen örnekler genelde sadece sonuçları ile verilmiştir. Ders notunu hazırlarken kullanılan kaynaklar son kısımda verilmiştir.

Ders notu ile ilgili yazım-içerik-bilimsel vb. hataları belirlemeniz durumunda zafer.bekiryazici@erdogan.edu.tr adresinden bana iletirseniz memnun olurum. İlerleyen süreçte olası hataların düzeltilmesi ile bu notun daha kapsamlı bir şekil almasını umuyorum.

Saygılarımla.

Dr. Zafer BEKİRYAZICI

1. Diferansiyel Denklemler ile ilgili Temel Kavramlar

- Bir veya birden fazla “bağımsız değişken”, bu bağımsız değişkene bağlı “bağımlı değişken” ve bu bağımlı değişkenin türevleri ile bunların fonksiyonlarını içeren denkleme “diferansiyel denklem” denir.
- Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türev, o denklemin mertebesidir.
Örneğin $y'' + x^2(y')^3 = 4x$ denklemi ikinci mertebededir.
- Diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türevin kuvveti o denklemin derecesidir.
Örneğin $(y'')^3 + (y')^5 \cos x = (y''')^4 e^x + \arctan x$ denklemi dördüncü derecedendir.
- Bir bağımsız değişken ve bu bağımsız değişkene bağımlı olan fonksiyonlar ile türevlerini içeren diferansiyel denkleme “adi diferansiyel denklem” denir.
- Birden fazla bağımsız değişkene göre türevler içeren diferansiyel denkleme “kısmi diferansiyel denklem” denir.
- Diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin dereceleri 1 ve katsayılar yalnızca bağımsız değişkene bağlı iseler bu denklem doğrusaldır.
- Diferansiyel denklem bağımlı değişken ve türevleri bakımından türdeş ise homojendir.
- Verilen bir eğri ailesini çözüm olarak kabul eden denklem, eğri ailesindeki keyfi sabitlerin sayısı kadar türev alınarak sabitlerin yok edilmesiyle bulunur.
Örneğin $y = cx^2 - 2$ eğri ailesini çözüm olarak kabul eden diferansiyel denklem $x^2 y' - 2xy = 4x$ şeklindedir.
- $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ile verilen n . mertebeden diferansiyel denklemi sağlayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitleri aracılığıyla çözümlerin tümünü barındıran fonksiyona genel çözüm denir.
Örneğin $y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ şeklindedir.
- Diferansiyel denklem ile birlikte verilen özel şartları da sağlayan çözüme özel çözüm denir.
Örneğin $y' = 3x^2 - 2x$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 2$ şartını sağlayan özel çözümü $y(x) = x^3 - x^2 + 2$ şeklindedir.
- Diferansiyel denklem ile birlikte verilen denklemin mertebesi sayısındaki özel koşullar bağımsız değişkenin tek bir değerinde veriliyorsa bu problem bir “Başlangıç Değer Problemi” olarak adlandırılır.
- Diferansiyel denklem ile birlikte verilen denklemin mertebesi sayısındaki özel koşullar bağımsız değişkenin farklı değerlerinde veriliyorsa bu problem bir “Sınır Değer Problemi” olarak adlandırılır.
- $f(x, y)$ fonksiyonu düzgün kapalı bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ise $y' = f(x, y)$ şeklindeki diferansiyel denklemin $y_0 = y(x_0)$ koşulunu sağlayan bir ve yalnız bir çözümü vardır.
- Diferansiyel denklemler Popülasyon Modeli, Radyoaktif Bozulma, Newton’un Yerçekimi Kanunu, Serbest Düşme Hareketi, Newton Soğutma Modeli, Mekanik Titreşim ve Asfalt Çökmesi gibi olayların modellenmesinde kullanılmaktadır.

2. Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

- $y' = f(x, y)$ ile verilen diferansiyel denklem $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ şeklinde yazılabiliyorsa bu denkleme değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem denir.
- $h(y) \neq 0$ için $\frac{y'}{h(y)} = g(x)$ ile çözüme varılır.
- Örneğin $y' = \frac{\sin x}{y}$ diferansiyel denkleminin çözümü $\frac{y^2}{2} + \cos x = c$ olur.
- Birinci mertebeden diferansiyel denklemler $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ şeklinde “diferansiyel form” adı verilen gösterim ile de ifade edilebilirler. Diferansiyel formda yazılan değişkenlerine ayrılabilir denklem için çözüm

$$\int g(x)dx - \int h(y)dy = c$$

şeklinde elde edilir.

- Örneğin $y' = 1 + x + y + xy$ denkleminin çözümü $y = c \cdot e^{\frac{x^2}{2} + x} - 1$ olur.
- Sabitler seçilirken $c, \ln c, c^2, \sin c, e^c, \sqrt{c}, \dots$ gibi seçimler yapılabilir.
- Verilen bir $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu için özel çözümler de elde edilebilir.
- Örneğin $2x(1 + y^2)dx - y(1 + 2x^2)dy = 0$ denkleminin $y(0) = 1$ olan çözümü $y^2 = 4x^2 + 1$ şeklindedir.
- Diferansiyel denklemlerin çözümünde “Kısmi İntegrasyon” ve “Basit Kesirlere Ayırma” gibi yöntemlerden faydalanılabilir.
- Örneğin $x \cos y dx - e^x \sin y dy = 0$ denkleminin çözümü $-(x + 1)e^{-x} + \ln(\cos y) = c$ şeklindedir.
- Örneğin $e^x y' + y - y^2 = 0$ denkleminin çözümü $\ln \left| \frac{y}{1-y} \right| - e^{-x} = c$ olur.
- Bazı ayrılabilir formda olmayan diferansiyel denklemler değişken dönüşümü yardımıyla ayrılabilir hale dönüştürülebilir.
- Örneğin $y' = (x + y + 1)^3$ denkleminin çözümü $\ln \frac{|x+y+2|}{|(x+y+1)^2 - x - y|} + 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x+2y+1}{\sqrt{3}} \right) = x + c$ şeklinde elde edilir.
- Örneğin $e^{x+y} y' = e^{2x-y}$ denkleminin çözümü $e^{2y} - 2e^x = c$ şeklindedir.
- Örneğin $y' = 6xy, y(0) = 1$ denkleminin çözümü $y = e^{3x^2}$ şeklindedir.
- Örneğin $xy' + y = -yx^2 \ln x$ denkleminin çözümü $\ln|y| + \ln x \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{x^2}{4} = c$ olur.
- Örneğin $\frac{\sin^3 x}{\cos^3 y} dx = \frac{\sin y}{\cos x} dy$ denkleminin çözümü $\sin^4 x + \cos^4 y = c$ olur.
- Örneğin $y' = (x + y + 1)^2$ denkleminin çözümü $\arctan(x + y + 1) = x + c$ olur.
- Örneğin herhangi bir $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2+x}, y(0) = 1$ denkleminin çözümü $y = \frac{1-x}{x+1}$ şeklindedir.
- Örneğin $(x + 2y + 5)dx + (3x + 6y - 1)dy = 0$ denkleminin çözümü $x + 3y + 16 \ln(x + 2y + 1) = c$ şeklindedir.

3. Homojen Diferansiyel Denklemler

- $y' = f(x, y)$ ile tanımlanan birinci mertebeli diferansiyel denklem herhangi bir f fonksiyonu için $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ formunda yazılabiliyorsa bu denklem homojen diferansiyel denklemdir.
- Örneğin $y' = \frac{x^3 - y^3}{x^2 y}$ denklemi homojen diferansiyel denklemdir.
- $f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu $\lambda > 0, n \in \mathbb{R}$ için $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ şartını sağlıyorsa n . mertebeden homojen bir fonksiyondur.
- $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminde $f(x, y)$ homojen bir fonksiyonsa bu diferansiyel denklem homojen diferansiyel denklemdir.
- Örneğin $(x^2 - y^2)dx + 3xydy = 0$ homojen diferansiyel denklemdir.
- Homojen diferansiyel denklemde $\frac{y}{x} = u$ değişken dönüşümü yapılarak denklem değişkenlerine ayrılabilir hale getirilir ve çözülür. $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux, dy = udx + xdu$ olur.
- Örneğin $y' = \frac{y^2 - 2x^2}{xy}$ diferansiyel denkleminin çözümü $\frac{y^2}{x^2} = -4 \ln|x| + c$ şeklindedir.
- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde hem $M(x, y)$ hem de $N(x, y)$ aynı n . dereceden homojen fonksiyonlar iseler, denklem homojen diferansiyel denklemdir.
- Örneğin $(xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}})dx - x^2 dy = 0$ denklemi 2. dereceden homojen diferansiyel denklemdir.
- $(x - y - x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}})dx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$ denkleminin $y(1) = 1$ olan çözümü $3 \ln x + \frac{3y}{x} + 2\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = 5$ şeklindedir.
- Denkleme göre $y = ux, y' = xu' + u$ değişken dönüşümü ile de çözüme gidilebilir.
- Örneğin $y' = \frac{y-x}{y+x}$ diferansiyel denkleminin çözümü $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln \frac{c}{|x|\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}}$ şeklindedir.
- Örneğin $(x + y \sin \frac{y}{x})dx - x \sin \frac{y}{x} dy = 0$ denkleminin çözümü $\ln|x| + \cos \frac{y}{x} = c$ olarak elde edilir.
- Örneğin $(x^3 + 2xy^2 - y^3)dx - (2y^3 - xy^2 + x^2 y)dy = 0$ denkleminin çözümü $\ln|x|\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}y}{x}\right) = c$ şeklindedir.

4. Tam Diferansiyel Denklemler

- $z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu için $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ ifadesine bu fonksiyonun tam diferansiyeli denir.
- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde $\frac{\partial M}{\partial y}$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}$ kısmi türevleri var ve $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ şartı sağlanıyor ise denkleme tam diferansiyel denklem denir.
- Örneğin $(5x + axy)dx + (8x^2 - \tan y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel denklem ise $a = 16$ olur.
- Tam diferansiyel denklemin çözümü için $F(x, y) = \int M(x, y)dx + h(y)$ veya $F(x, y) = \int N(x, y)dy + g(y)$ fonksiyonu bulunur ve tamlıktan yararlanılarak $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$ veya $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ eşitliği kullanılarak $F(x, y) = c$ çözümü elde edilir.

- Örneğin $F(x, y) = c$ fonksiyonu $\underbrace{\cos y}_{M(x, y)} dx + \underbrace{(2y - x \sin y)}_{N(x, y)} dy = 0$ diferansiyel denkleminde şöyle bulunur:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \cos y, \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y - x \sin y$$

$$\Rightarrow \int M(x, y)dx = \int \cos y dx + h(y) = x \cos y + h(y) = F(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y - x \sin y \Rightarrow \frac{\partial (x \cos y + h(y))}{\partial y} = -x \sin y + h'(y) = 2y - x \sin y \Rightarrow h'(y) = 2y \Rightarrow h(y) = y^2$$

$$\Rightarrow F(x, y) = x \cos y + y^2 = c$$

$$\Rightarrow \int N(x, y)dy = \int (2y - x \sin y) dy + g(x) = y^2 + x \cos y + g(x) = F(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \cos y \Rightarrow \frac{\partial (y^2 + x \cos y + g(x))}{\partial x} = \cos y + g'(x) = \cos y \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$$

$$\Rightarrow F(x, y) = x \cos y + y^2 = c$$

- Örneğin $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$ denkleminin çözümü $F(x, y) = y \sin x + x \cos y = c$ şeklindedir.
- Benzer yöntemle $\int M(x, y)dx$ ve $\int N(x, y)dy$ integrallerindeki ortak terim bir kez kullanılarak da $F(x, y)$ elde edilebilir.
- Örneğin $\left(3x^2 + \frac{2y}{x}\right)dx + \left(2 \ln x + \frac{3}{y}\right)dy = 0$ denkleminin çözümü $F(x, y) = x^3 + 2y \ln x + 3 \ln y = c$ şeklindedir.
- Tam diferansiyel denklemde integral alarak da $F(x, y)$ elde edilebilir. Ortak terim 1 kez kullanılır.
- Örneğin $\frac{2x}{y^3} dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0$ denkleminin çözümü $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$ şeklindedir.
- Örneğin $(e^{xy} + xye^{xy})dx + x^2 e^{xy} dy = 0$ denkleminin $y(1) = 1$ olan çözümü $xe^{xy} = e$ olur.
- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ denklemi hem homojen hem de tam diferansiyel denklem ise genel çözüm $xM(x, y) + yN(x, y) = c$ şeklindedir.
- Örneğin $(x^3 - 2xy^2)dx + (2y^3 - 2x^2y)dy = 0$ denkleminin çözümü $x(x^3 - 2xy^2) + y(2y^3 - 2x^2y) = c$ olur.

5. İntegrasyon Çarpanı

- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ diferansiyel denkleminde $\frac{\partial M}{\partial y}$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}$ kısmi türevleri var ve $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ oluyor ise denklemde tam diferansiyel denklem yöntemleri uygulanamaz.
- Bu durumda bir tam diferansiyel denklem elde edebilmek için sıfırdan farklı bir $\mu(x, y)$ fonksiyonu kullanılarak $\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$ formunda bir denklem elde edilir. Bu bir tam diferansiyel denklem ise $\mu(x, y)$ bir integral çarpanıdır.
- x 'e bağlı integral çarpanı: $\frac{M_y - N_x}{N} = f(x)$ şeklinde ise $\mu(x, y) = e^{\int f(x)dx}$ formundaki çarpan kullanılır.
- Örneğin $(1 - xy)dx + (xy - x^2)dy = 0$ diferansiyel denklemi için integral çarpanı $\frac{1}{x}$ şeklindedir ve genel çözüm $\ln x - yx + \frac{y^2}{2} = c$ olur.
- y 'ye bağlı integral çarpanı: $\frac{N_x - M_y}{M} = g(y)$ şeklinde ise $\mu(x, y) = e^{\int g(y)dy}$ çarpanı kullanılır.
- Örneğin $x^2ydx + (x^3 + 2y^3)dy = 0$ diferansiyel denklemi için integral çarpanı y^2 şeklindedir ve genel çözüm $\frac{x^3y^3}{3} + \frac{y^6}{6} = c$ olur.
- Homojen denklemler için $M(x, y)$ ve $N(x, y)$ aynı dereceden homojen fonksiyonlar ve $xM + yN \neq 0$ ise $\mu(x, y) = \frac{1}{xM + yN}$ integral çarpanı kullanılır.
- $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$ diferansiyel denklemi için integral çarpanı $\frac{1}{x^5}$ şeklindedir ve genel çözüm $\ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$ olur.
- Denklemlere özel integral çarpanları da kullanılabilir.
- Örneğin $(3x^4y^7 + 2x^3y^3)dx + 4x^5y^6dy = 0$ diferansiyel denkleminin integral çarpanı $\frac{1}{x^2y^3}$ olur ve genel çözüm $x^3y^4 + x^2 = c$ şeklindedir.
- Örneğin $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ diferansiyel denkleminin integral çarpanı x olur ve genel çözüm $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c$ şeklindedir.
- Örneğin $\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$ diferansiyel denkleminin integrasyon çarpanı $\frac{1}{y^2}$ olur ve genel çözüm $\frac{1}{y} \ln x + \frac{y^2}{2} = c$ şeklindedir.

6. Lineer Diferansiyel Denklem

- Birinci mertebeden bir diferansiyel denklem $A(x).y' + B(x).y = C(x)$ formatında verilmişse bağımlı değişkene göre doğrusal formdadır.
- $A(x).y' + B(x).y = C(x)$ ile verilen diferansiyel denklem $\frac{B(x)}{A(x)} = P(x)$ ve $\frac{C(x)}{A(x)} = Q(x)$ olmak üzere $y' + P(x).y = Q(x)$ formunda yeniden yazılırsa birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir.
- Örneğin $x^2 \ln x \frac{dy}{dx} + xy = 1$ için $y + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{x^2 \ln x}$ lineer diferansiyel denklemdir.
- Lineer diferansiyel denklemin çözümünde $\mu = e^{\int P(x)dx}$ integral çarpanı kullanılır. Genel çözüm $y = u(x).v(x)$ şeklindedir. Burada $u(x) = \frac{1}{\mu(x)}$ ve $v(x) = \int \mu(x)Q(x)dx + c$ olmak üzere $y = \frac{1}{\mu(x)} [\int \mu(x)Q(x)dx + c]$ şeklinde genel çözüm aranır.
- Örneğin $x^2 \ln x \frac{dy}{dx} + xy = 1$ diferansiyel denkleminin çözümü $y = -\frac{1}{x \ln x} + \frac{c}{\ln x}$ olur.
- Örneğin $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$ denkleminin $y(0) = 1$ olan çözümü $y = \cos x (\sin x + 1)$ şeklindedir.
- Örneğin $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + 3xy = 6x$ diferansiyel denkleminin çözümü $2 + \frac{c}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ olur.

7. Bernoulli ve Riccati Diferansiyel Denklemleri

- Kendisi lineer olmayan Bernoulli diferansiyel denklemini özel bir değişken değişimi ile lineer diferansiyel denklem haline indirgenebilir.
- Diferansiyel denklem $y' + P(x)y = y^n Q(x)$ formundaysa Bernoulli diferansiyel denklemini olarak adlandırılır.
- Örneğin $y' + xy = xy^3$ bir Bernoulli diferansiyel denklemdir.
- Bernoulli diferansiyel denkleminin çözümü için denklemin her iki yanı y^{-n} ile çarpılır, elde edilen denklemde $z = y^{1-n}$ değişken değişimi yapılır. Elde edilecek lineer diferansiyel denklemde $z = uv$ çözümü aranarak sonuca ulaşılır.
- Örneğin $y' + xy = xy^3$ denkleminin çözümü $\ln\left(\frac{1-y^2}{x^2}\right) = x^2 + c$ şeklindedir.
- Örneğin $y' + y = 2xe^{-2x}y^{-1}$ denkleminin $y(0) = 1$ olan çözümü $y^2 = (2x^2 + 1)e^{-2x}$ olur.
- Örneğin $y' - \frac{1}{x}y = y^3(1 + \ln x)$ denkleminin çözümü $\frac{1}{y^2} = -\frac{2x}{9}(2 + 3 \ln x) + \frac{c}{x^2}$ şeklindedir.
- Bernoulli diferansiyel denklemini gibi Riccati diferansiyel denklemini de özel bir dönüşüm ile lineer diferansiyel denkleme dönüştür.
- Diferansiyel denklem $y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$ şeklinde ise Riccati diferansiyel denklemini olarak adlandırılır. Bu denklem bir özel çözümü olan y_1 fonksiyonu biliniyor ise çözülebilir. $y = y_1 + \frac{1}{z}$, $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$ dönüşümleri ile $z' - [2y_1P(x) + Q(x)]z = P(x)$ formundaki lineer diferansiyel denklem elde edilir.
- Örneğin $y' + e^{-x}y^2 - 3y + e^x$ denkleminin özel bir çözümü $y_1 = e^x$ ise denklemin genel çözümü $e^{-x}(y - e^x)(x - c) = 1$ şeklindedir.

8. Yüksek Dereceli Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

- I. Bağımlı Değişkenin Polinomu Formundaki DD: $F(x, y, (y')^n), n \geq 1$ tipindeki n . derece diferansiyel denklemin çözümünde $y' = p, (y')^2 = p^2, \dots, (y')^n = p^n$ dönüşümleri ile y değişkenine göre birpolinom haline getirilerek çözülür.
- n . derece denklem için p değişken dönüşümü ile $F_1(x, y, c) = 0, \dots, F_n(x, y, c) = 0$ çözümleri elde edilir. Genel çözüm $F_1(x, y, c), \dots, F_n(x, y, c) = 0$ şeklindedir.
- Örneğin $x^2(y')^2 - 4xyy' - 5y^2 = 0$ denkleminin çözümü $(y - cx^5)(xy - c) = 0$ olur.
- Örneğin $(y')(y' - 1)(y' - x)(y' - 2y) = 0$ denkleminin çözümü $(y - c)(y - x - c)\left(y - \frac{x^2}{2} - c\right)(\ln y - 2x - c) = 0$ şeklindedir.
- Örneğin $x^2(y')^2 + 2xyy' + y^2 - x^2y^4 = 0$ denkleminin çözümü $y^2(c^2x^2 - x^2 \ln^2 x) - 1 = 0$ olur.
- II. Clairut DD: Diferansiyel denklem $y' = p$ için $y = xp + f(p)$ şeklinde ise Clairut denklemi olarak adlandırılır.
- Clairut denkleminde x 'e göre türev alınarak $(x + f'(p))p' = 0$ elde edilir. $p' = 0 \Rightarrow p = c$ bulunur ve genel çözüm $y = xc + f(c)$ olarak elde edilir. $x + f'(p)$ denkleminde de tekil çözüm bulunur.
- Tekil çözüm genel çözümden elde edilemez ve keyfi sabit bulundurmaz.
- Örneğin $y = xy' + \frac{1}{y'}$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = cx + \frac{1}{c}$ ve tekil çözümü $y^2 = 4x$ şeklindedir.
- Örneğin $y = xp - \ln p + 1$ denkleminin genel çözümü $y = xc - \ln c + 1$ ve tekil çözümü $y = 2 + \ln x$ şeklindedir.
- Örneğin $y' = xy - \frac{4}{27}(y')^3$ denkleminin genel çözümü $y = xc - \frac{4}{27}c^3$, tekil çözümü $y^2 = x^3$ olur.
- Örneğin $y = xp + 2\sqrt{p}$ denkleminin genel çözümü $y = xc + 2\sqrt{c}$ ve tekil çözümü $y = -\frac{1}{x}$ olur.
- III. Lagrange DD: $y = xf(p) + g(p)$ diferansiyel denklemi Lagrange diferansiyel denklemi olarak adlandırılır.
- Çözüm için her iki yanın x 'e göre türevi alınarak $p - f(p) = [xf'(p) + g'(p)]p'$ denklemi elde edilir. $p - f(p) = 0$ olarak kabul edilirse p_k kökleri denkleminde yazılır ve $y = xf(p_k) + g(p_k)$ tekil çözümleri elde edilir. $p - f(p) \neq 0$ olarak kabul edilirse genel çözüm bulunur.
- Örneğin $y = x + p^2 - \frac{2}{3}p^3$ denkleminin tekil çözümü $y = x + \frac{1}{3}$ ve genel çözümü $(y - c)^2 = \frac{4}{9}(c - x)^3$ şeklindedir.
- IV. $F(x, p) = 0, G(y, p) = 0$ Tipindeki DD: $F(x, p) = 0$ denkleminde $y = \int f(x)dx + c$ genel çözümü, $G(y, p) = 0$ denkleminde $\int \frac{dy}{g(y)} = x + c$ genel çözümü elde edilir.
- Örneğin $x = \sin(y')$ denkleminin çözümü $y = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + c$ şeklindedir.
- Örneğin $x^2 = (y')^2(a^2 - x^2)$ denkleminin çözümü $(y - c)^2 = a^2 - x^2$ şeklindedir.
- Örneğin $9yp^2 - 4 = 0$ denkleminin çözümü $4y^3 = (c \pm 2x)^2$ olur.
- V. $y = f(x, p)$ ve $x = g(y, p)$ Tipindeki DD: $y = f(x, p)$ denklemi için $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} \frac{dp}{dx}$ denklemi bulunur ve buradan genel ve tekil çözümler elde edilir. $x = g(y, p)$ denklemi için $\frac{dx}{dy} = \frac{dg}{dy} + \frac{dg}{dp} \frac{dp}{dy}$ denklemi bulunur ve buradan genel ve tekil çözümler elde edilir.
- Örneğin $y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$ için tekil çözüm $y = \frac{x^2}{4}$, genel çözüm $y = x^2 + cx + c^2$ olur.
- Örneğin $y = 2px + x^2 + \frac{p^2}{2}$ için tekil çözüm $y = -x^2$, genel çözüm $y = -\frac{x^2}{2} + cx + \frac{c^2}{2}$ olur.
- Örneğin $y = px \ln x$ denklemi için tekil çözüm $x = 1$ ve genel çözüm $y = c \ln x$ şeklindedir.
- Örneğin $x = y/2p - y^2p^2/2$ için $27y^4 = -32x^3$ tekil ve $y^2 - 2cx - c^2 = 0$ genel çözümü gelir.

9. Devre Uygulamaları – I: RL-RC Devreleri

- RL devresi seri olarak bağlı bobin ve dirençten kurulu bir gerilim ya da akım kaynağı tarafından beslenen bir devredir. Kirchhoff Voltaj Kanunu kapalı bir devrede toplam voltajlar için $V_R + V_L = V$ denklemini verir.
- Dolayısıyla t_0 anında devreden i_0 akımının geçtiği varsayılırsa ve elektromotor kuvvetinin $V(t_0) = V_0$ olması durumunda devreden geçecek akımın, $i(t)$, zamana göre değişimini veren diferansiyel denklem elde edilir:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V$$

- Her iki tarafın L 'ye bölünmesi ile lineer bir denklem elde edilir: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$. t_0 anında $i = i_0$ olduğundan $i(t) = \frac{V_0}{R} + \left(i_0 - \frac{V_0}{R}\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$ bulunur. $i_0 = 0$ için çözüm $i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$ şeklindedir.
- RC devresi, veya RC filtresi, direnç ve kapasitörden oluşan ve gerilim veya akım kaynağı tarafından beslenen bir elektrik devresidir. Kirchhoff Voltaj Kanunu toplam voltaja uygulanırsa RC devresinde $V_R + V_C = V$ elde edilir.
- Buradan $Ri + \frac{1}{C} \int idt = V$ elde edilir. Devrenin sabit voltajlı kaynaktan beslendiği varsayılırsa, bu denklemden aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir $\left(i = \frac{dq}{dt}, q = \int idt\right)$.

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

- Her iki tarafın R 'ye bölünmesiyle lineer bir diferansiyel denklem elde edilir: $\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{RC}\right)q = 0$. Denklemin çözümü $q = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$ şeklindedir.
- Örneğin RL devresinde elektromotor kuvvetinin $110 \sin 120\pi t$ uyarınca değiştiği durumda $L = 3 H$, $R = 15$ ohm olarak verildiğinde ve $t = 0$ anında $i = 0$ amper olduğuna göre devreden geçen akımın zamana göre fonksiyonu $i(t) = \frac{22}{3(1+576\pi^2)}(\sin 120\pi t - 24\pi \cos 120\pi t + 24\pi e^{-5t})$ şeklindedir.
- Bir RC devresinde $R = 10$ ohm, $C = 10^{-3}$ farad ve $E(t) = 100 \sin 120\pi t$ olarak verildiğinde $t = 0$ anında $q = 0$ olduğuna göre kondensatörde depolanan elektrik yükünün zamana bağlı fonksiyonu $q(t) = \frac{1}{50+72\pi^2}(5 \sin 120\pi t - 6\pi \cos 120\pi t) + \frac{3\pi e^{-100t}}{25+36\pi^2}$.
- Bir RL devresinde direnç $R = 50$ ohm, bobin $L = 10 H$ bulunmakta ve $t = 0$ anında anahtar kapatıldığında $V = 100 V$ sabit voltaj uygulanmaktadır. Akımın denklemi $i(t) = 2(1 - e^{-5t})$ iken $t = 0.5$ anında $1.8358 A$ akım bulunmaktadır.
- Bir RL devresinde $5 V$ elektromotor kuvveti, 50 ohm bir direnç ve $1 H$ bir bobin ve sıfır başlangıç akımı bulunmaktadır. Herhangi bir t anında devredeki akım $i(t) = 0.1(1 - e^{-50t}) A$ şeklindedir.
- Bir RC devresinde $R = 5 W$ ve $C = 0.02 F$ elemanları $E = 100 V$ gücünde bir pile bağlanmıştır. $t = 0$ anında kapasitörde sıfır voltaj bulunmaktadır. Kapasitördeki voltajın denklemi $q(t) = 2(1 - e^{-10t})$ şeklindedir.
- Bir RC devresinde $R = 10W$, $C = 4 \times 10^{-3} F$ ve $E = 85 \cos 150t V$ bileşenleri için $t = 0$ anında anahtar kapatıldığında kondensatördeki yük $-0.05 C$ ise $t > 0$ anındaki yük $q(t) = 0.0092 \cos 150t + 0.055 \sin 150t - 0.0592e^{-25t}$ ve akım ise $i = \frac{dq}{dt}$ olduğundan $i(t) = -1.38 \sin 150t + 8.25 \cos 150t + 1.48e^{-25t}$ şeklindedir.

10. Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Denklemler

- $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ diferansiyel denklemi n . mertebeden diferansiyel denklemdir.
- $a_0, a_1, \dots, a_n$ sabit sayılar olmak üzere $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ denklemi n . dereceden sabit katsayılı lineer homojen denklemdir.
- L : Lineer operatör olmak üzere bu denklem $L[y] = 0$ şeklinde sembolik olarak gösterilir.
- $\frac{d}{dx} = D$ (Türev operatörü) olmak üzere $y' = Dy, y'' = D^2 y, \dots, y^{(n)} = D^n y$ olacağından bu denklem $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n)y = 0$ veya $L(D)y = 0$ şeklinde gösterilebilir.
- $L[y] = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız n tane özel çözümü bulunursa, genel çözüm $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ olur.
- $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ determinantına $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının Wronskiyeni denir. $W \neq 0$ ise $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımsızdır.
- $L[y] = 0$ denkleminde $y = e^{rx}$ formunda özel çözümler arayalım. $y' = r e^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^n e^{rx}$ olur. Bu değerler $L[y] = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) e^{rx} = 0$$
 olur. $e^{rx} \neq 0$ olduğuna göre $a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem n . dereceden polinom denklemdir ve $L[y] = 0$ denkleminin karakteristik denklemi olarak adlandırılır.
- Karakteristik denklemin birbirinden farklı $r_1, r_2, \dots, r_n$ şeklinde kökleri varsa $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}$ çözümleri $L[y] = 0$ denkleminin özel çözümleridir ve bu çözümler lineer bağımsızdır. Genel çözüm $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$ olur.
- Karakteristik denklemin $r_1 = r_2 = \dots = r_k \neq r_{k+1}, \dots, r_n$ şeklinde k –katlı kökleri varsa genel çözüm $y = (c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) e^{r_1 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$ olur.
- Karakteristik denklemin $r = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ şeklinde kompleks kökleri var ve diğer kökleri reel ise genel çözüm $y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} + c_3 e^{r_3 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$ olur.
- Örneğin özel çözümleri $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ olan diferansiyel denklemin genel çözümü $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ şeklindedir.
- $y_1 = x^2, y_2 = x^3, y_3 = x^{-2}$ özel çözümlerine sahip olan diferansiyel denklemin genel çözümü $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^{-2}$ şeklindedir.
- Örneğin $(D^3 + 2D^2 - 5D - 6)y = 0$ denkleminin çözümü $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + c_3 e^{2x}$ olur.
- Örneğin $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ denkleminin çözümü $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$ olur.
- Örneğin $(D^2 - 2D + 10)y = 0$ denkleminin çözümü $y = e^x (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$ şeklindedir.
- Örneğin $(D^4 + 5D^2 - 36)y = 0$ denkleminin çözümü $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x$ şeklindedir.

11. Belirsiz Katsayılar Yöntemi

- L : Lineer operatör olmak üzere $L[y] = a_0 y^{(n)} + \dots + a_n y = F(x)$ denklemi homojen olmayan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemdir.
- Denklemin genel çözümü denklemin homojen kısmının çözümü ile denklemin bir özel çözümünün toplamıdır. Denklemin homojen kısmının genel çözümü U , $L[y] = F(x)$ denkleminin özel bir çözümü V ise genel çözüm $y = U + V$ olur.
- I. $F(x)$ polinom fonksiyonu ise: $a_n \neq 0$ ise $P(x)$, $F(x)$ ile aynı dereceli polinom fonksiyonu olmak üzere $V(x) = P(x)$ özel çözümü aranır.
- $a_n = 0, a_{n-1} \neq 0$ ise $V(x) = xP(x)$, $a_{n-1} = 0, a_{n-2} \neq 0$ ise $V(x) = x^2 P(x)$ vs. şeklinde bulunur.
- Örneğin $y''' + 2y'' - y' - 2y = x^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ şeklindedir.
- Örneğin $y''' + y'' = x^2 + 1$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ olur.
- II. $F(x) = k e^{mx}$ şeklinde ise: k ve m bilinen sabitler ise A belirlenecek bir sabit olmak üzere $V(x) = A e^{mx}$ özel çözümü aranır.
- Örneğin $y'' - y' - 2y = e^{3x}$ denkleminde çözüm $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x}$ olur.
- Denklemin bir veya birden çok (k tane) kökü m olursa özel çözüm $V = A \cdot x^k \cdot e^{mx}$ şeklinde aranır.
- Örneğin $y''' - 4y'' - 2y' + 5y = \frac{3}{2}e^x$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 e^{\left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)x} + c_2 e^{\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2}\right)x} + c_3 e^x - \frac{3}{14}x e^x$ şeklindedir.
- III. $F(x) = k_1 \sin \beta x$ veya $F(x) = k_2 \cos \beta x$ şeklinde ise: $V(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x$ şeklinde özel çözüm aranır.
- Örneğin $y'' - y' - 2y = \sin 2x$ diferansiyel denklemi için genel çözüm $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{20} \cos 2x$ olur.
- IV. $F(x) = e^{mx} w(x)$ şeklinde ise: Burada $w(x)$ trigonometrik veya bir polinom olabilir. Bu durumda $V(x) = e^{mx} P(x)$, $V(x) = e^{mx} P(x) \sin \beta x$ veya $V(x) = e^{mx} P(x) \cos \beta x$ formunda olur.
- Örneğin $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2x e^{-x}$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + \left(-\frac{1}{12}x - \frac{13}{144}\right) e^{-x}$ şeklindedir.
- $F(x)$ birden çok formda fonksiyondan oluşuyorsa her bir parça için V_1, V_2 gibi özel çözümler bulunur ve $V = V_1 + V_2$ olur.

12. Cauchy-Euler & Legendre Diferansiyel Denklemleri

- $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2} x^2 y'' + a_{n-1} x y' + a_n y = F(x)$ denklemi Cauchy-Euler diferansiyel denklemdir.
- Bu denklemin çözümü için $x = e^t \rightarrow t = \ln x$ değişken dönüşümü yapılır.
- $xy' = Dy, x^2 y'' = D(D-1)y, x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y, \dots, x^n y^{(n)} = D(D-1) \dots (D-n+1)y$ değerleri Cauchy-Euler denkleminde yerine yazılırsa sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem elde edilir.
- Genel çözüm elde edildikten sonra $t = \ln x$ yazılarak çözüm bulunur.
- Örneğin $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ şeklindedir.
- Örneğin $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln x$ denkleminin genel çözümü $y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{3}{4}$ şeklindedir.
- a ve b sabit sayılar olmak üzere $(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = F(x)$ denklemi Legendre diferansiyel denklemdir.
- Bu denklemin çözümü için $(ax+b) = e^t \rightarrow t = \ln(ax+b)$ yazılır.
- $(ax+b)y' = Dy, (ax+b)^2 y'' = D(D-1)y, (ax+b)^3 y''' = D(D-1)(D-2)y, \dots$ elde edilir. Denklem sabit katsayılı lineer diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülür.
- Örneğin $(x+1)^3 y''' + 3(x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1(x+1) + c_2[\ln(x+1)](x+1) + \frac{c_3}{(x+1)^2}$ olur.
- Örneğin $(x-1)^3 y''' + 2(x-1)^2 y'' - 4(x-1)y' + 4y = 4 \ln(x-1)$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^{-2} + \ln(x-1) + 1$ şeklindedir.

13. Değişken Katsayılı Lineer Homojen DD & Mertebe Düşürme Yöntemi

- $p_1, p_2, \dots, p_n$, x 'in sürekli fonksiyonları olmak üzere $L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ denklemi değişken katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemdir. $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının Wronskiyeni $W(x)$ olsun. $x = x_0$ için tanımlı $L[y] = 0$ denklemi için $W(x) = W(x_0) e^{-\int p_1(x) dx}$ bağıntısı vardır. Bu bağıntı $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ denkleminin özel bir çözümünün bilinmesi durumunda genel çözümünün bulunması için kullanılır.
- $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ denkleminin bir özel çözümü y_1 olsun. $y = c_1 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 y_1$ denklemi bu denklemin genel çözümüdür.
- Sonuç olarak $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0$ homojen denkleminin bir çözümü y_1 verilmiş ise diğer lineer bağımsız çözümü $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}}{y_1^2} dx$ şeklinde bulunur.
- Örneğin $(x+1)^2 y'' + (x+1)(x-2)y' + (2-x)y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x+1$ ise genel çözümü $y = c_1(x+1)(x+2)e^{-x} + c_2(x+1)$ olur.
- $[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ denkleminin özel bir çözümü y_1 olsun. $y = y_1 z$ dönüşümü yapılır. Buradan $y', y'', \dots, y^{(n)}$ türevleri hesaplanır ve denklemde yerine konur. $z' = w$ alınırsa $w^{(n-1)} + a_1 w^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} w = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin bir özel çözümü y_2 olsun. $w = y_2 w_1$ dönüşümü yapılır. Benzer şekilde denklemin mertebesi bir daha düşürülebilir. Süreç sonunda $L[y] = 0$ denkleminin $y_1, y_2, \dots, y_k$ gibi lineer bağımsız çözümleri biliniyorsa, $w_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', w_2 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \dots, w_{k-1} = \left(\frac{y_k}{y_1}\right)'$ dönüşümleri yardımıyla denklemin mertebesi düşürülür. Genel çözüm son aşamada elde edilir.
- Örneğin $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = x$ ise genel çözümü $y = \frac{1}{2} c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x$ şeklinde elde edilir.
- $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = F(x)$ denkleminin $y_1, y_2, \dots, y_n$ gibi m tane lineer bağımsız çözümü biliniyorsa mertebesi $(m-1)$ kadar düşürülür. Genel çözüm $y_1 + y_h$ olarak elde edilir.
- Örneğin $(2x - x^2) y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$ denkleminin $y_1 = 1, y_2 = x$ iki özel çözümü ise denklemin genel çözümü $y = c_1(x^2 - x + 1) + c_2(x-1) + 1$ şeklindedir.
- $a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0 y = F(x)$ denklemi 2. Mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemdir. y_1 bu denklemin homojen kısmının özel çözümü olsun. $y = y_1 z$ değişken dönüşümü yapılsa $a_2 y_1 z'' + (2a_2 y' + a_1 y_1) z' = F(x)$ denklemi elde edilir. $z' = w$ dersek bu denklem $a_2 y_1 w' + (2a_2 y' + a_1 y_1) w = F(x)$ olur ve bu denklemin çözümünden w bulunur. $z' = w$ dan z bulunur. $y = z y_1$ çözümü istenen genel çözümdür.
- Örneğin $x^2 y'' - (x^2 + 2x) y' + (x+2)y = x^3$ diferansiyel denkleminin homojen kısmının bir çözümü $y_1 = x$ ise denklemin genel çözümü $y = c_1 x + c_2 x e^x - x^2$ şeklindedir.

14. Devre Uygulamaları – II: RLC Devresi

- Bir RLC devresi sabit olarak bağlı bir direnç, bir bobin ve bir kapasitörden oluşur. Devreye sabit elektromotor kuvveti E 'nin uygulandığı varsayalım. Bu devre için $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E$ denklemi yazılır. $\int i = q$ ile denk olarak $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = E$ elde edilir. Türevi alınırsa

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

ikinci mertebe lineer homojen denklemi elde edilir.

- Bu denklemin karakteristik polinomu $Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$ olur. Kökleri $m_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ olur. Burada üç durum vardır.
- i) $R^2 > \frac{4L}{C}$ olması durumunda m_1 ve m_2 gerçel, farklı ve negatiftirler. Genel çözüm $i(t) = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t}$ şeklindedir.
- ii) $R^2 = \frac{4L}{C}$ olması durumunda m_1 ve m_2 gerçel, negatif ve eşittirler. Genel çözüm $i(t) = (A + Bt)e^{-\frac{Rt}{2L}}$ şeklindedir.
- iii) $R^2 < \frac{4L}{C}$ olması durumunda m_1 ve m_2 kompleksirler. Genel çözüm $i(t) = e^{-\alpha t} (A \cos wt + B \sin wt)$ şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{R}{2L}$, $w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ olur.
- Örneğin sabit voltajdan beslenen bir seri RLC devresinde $\frac{d^2 i}{dt^2} + 4 \frac{di}{dt} + 4i = 0$ denklemi ile $i(0) = 2A$, $i'(0) = 4$ koşulları verilmişse akım $i(t) = (2 + 8t)e^{-2t}$ şeklindedir.

15. Parametrelerin Değişimi Yöntemi

- Parametrelerin (sabitlerin) değişimi yöntemi hem sabit katsayılı hem de değişken katsayılı homojen olmayan lineer denklemlerin hem özel hem de genel çözümlerini bulmak için kullanılan genel bir yöntemdir.
- Bu yöntemin ön koşulları şöyledir: i) $L(D)y = b(x)$ diferansiyel denkleminin $L(D)y = 0$ homojen kısmının lineer bağımsız çözümlerinin oluşturduğu $T = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ temel çözümler kümesinin biliniyor olması, yani homojen kısmın $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ genel çözümünün biliniyor olması gerekir, ii) $b(x)$ 'in bir I aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olması gerekir.
- Yöntemin esası $y - h = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ denklemindeki $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerinin yerine bağımsız değişkenin $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ fonksiyonlarını almak ve bu yeni fonksiyonları $y = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2 + \dots + v_n(x)y_n$ çözümünün denklemini sağlayacak şekilde belirlenmesidir.
- Bu çözümü sağlayacak $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ fonksiyonları yerine yazılarak özel çözüm $y_0 = v_1(x)y_1 + \dots + v_n(x)y_n$ ve genel çözüm $y = y_h + y_0$ olacak şekilde elde edilir.
- İkinci mertebe $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ diferansiyel denklemini ele alalım. Homojen kısmı $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ için y_1 ve y_2 gibi iki tane lineer bağımsız çözüm fonksiyonu ve $y_h = u = c_1 y_1 + c_2 y_2$ şeklinde homojen kısmın çözümü vardır.
- Homojen olmayan denklemin çözümü için $y_0 = v = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$ formunda biz çözüm aranır.
- Burada $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ olmak üzere $u_1 = - \int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$ ve $u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx$ şeklindedir ve özel çözüm $v = u_1 y_1 + u_2 y_2$ olur.
- Örneğin $y'' - y = e^x$ denkleminin çözümü $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^x$ şeklindedir.
- Örneğin $y'' - 2y' - 3y = x e^{-x}$ denklemin çözümü $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{x^2}{8} e^{-x} + e^{3x} \left(-\frac{x}{16} e^{-4x} - \frac{1}{64} e^{-4x} \right)$ olarak elde edilir.
- Örneğin $t^2 y'' - 2y = \frac{3}{t}$ diferansiyel denkleminin homojen kısmının çözümü $y = c_1 t^2 + c_2 \frac{1}{t}$ ise denklemin genel çözümü $y = c_1 t^2 + c_2 \frac{1}{t} - \frac{1}{3t} - \frac{1}{t} \ln t$ şeklindedir.
- Örneğin $xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x}$ denkleminin homojen kısmının çözümleri $y_1 = e^x$ ve $y_2 = 1 + x$ ise denklemin genel çözümü $y = c_1 e^x + c_2 (x + 1) + \frac{(x-1)}{2} e^{2x}$ olur.
- Örneğin $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ denkleminin genel çözümü $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \ln|\sin x| \sin x$ şeklindedir.

16. Laplace Dönüşümü

- $f(t), t \in \mathbb{R}^+$ aralığında tanımlı bir fonksiyon, s ise $a < s < b$ için değişen bir parametre olsun. $F(s)$ fonksiyonu $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ şeklinde tanımlansın. s 'nin bütün değerleri için bu integral mevcut ise bu integralle tanımlanan $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir ve $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ile gösterilir. Bazı Laplace dönüşümleri şöyle verilir:

$f(x)$	$F(s)$
1	$1/s$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin bx$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
$\cos bx$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
$e^{ax} \sin bx$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
$e^{ax} \cos bx$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$

- Laplace dönüşümünün bazı temel özellikleri şöyle sıralabilir:
 - Laplace dönüşümü lineerdir: $\mathcal{L}\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(x)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(x)\}$
 - $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}\{f(ax)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
 - $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ise $\mathcal{L}\{(-1)^n x^n f(x)\} = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
- Örneğin $f(x) = 5 + e^x + 3 \cos x$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $\frac{5}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{3s}{s^2+1}$ şeklindedir.
- Örneğin $x \sin ax$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $-\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ olur.
- $\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)$ ve $\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n \mathcal{L}\{f(x)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ olur. Ayrıca $\mathcal{L}\{\int_0^x f(t)dt\} = \frac{F(s)}{s}$ şeklindedir.
- $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ olacak biçimde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise f' 'ye F 'nin ters Laplace dönüşümü denir ve $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ile gösterilir.
- Ters Laplace dönüşümü, Laplace dönüşümü ile benzer özelliklere sahiptir.
- Örneğin $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = 4e^{-4x} - 4xe^{-4x}$ şeklinde iken $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s}{(s+1)^4}\right\} = \frac{x^2 e^{-x}}{2} (3-x)$ olur.
- Ters Laplace dönüşümünü elde etmek için bir yol, eğer mümkünse, fonksiyonu kısmi kesirlerin toplamı olarak ifade etmek ve her bir kısmi kesrin ters Laplace dönüşümünü hesaplamaktır.
- Örneğin $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\} = \frac{8}{15}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{5}e^{-5x}$ olur.
- Örneğin $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s+1)}\right\} = -\frac{1}{6}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$ şeklindedir.
- Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ ve $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(x)$ ise $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$ olur.
- Örneğin $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = x - \sin x$ şeklindedir.
- $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ fonksiyonuna Gamma fonksiyonu denir. $\Gamma(1) = 1$. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olur. Ayrıca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ şeklindedir. $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ olur.
- Örneğin $\mathcal{L}\{5t^2 + 2t^{3/2}\} = \frac{10}{s^3} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}$ şeklindedir.

17. Seri Yönteminin Temelleri

- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisine $f(x)$ fonksiyonunun x 'in kuvvetlerine göre seriye açılımı denir. $x = x_1$ için bu toplam belli bir sayıya yaklaşıyorsa seri $x = x_1$ noktasında yakınsak, yaklaşmıyorsa seri $x = x_1$ noktasında ıraksaktır.
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ serisine $f(x)$ fonksiyonunun $(x - x_0)$ 'in kuvvetlerine göre seriye açılımı denir. $x = x_0$ için seri yakınsaktır. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 'in herhangi bir değeri için seri belli bir değere yaklaşmıyorsa seri ıraksaktır.
- Bu iki seri tipine kuvvet serileri denir.
- $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ serisine $f(x)$ serisinin Maclaurin serisi denir.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ serisine $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi veya Taylor açılımı denir.
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kuvvet serisini göz önüne alalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$ ise $|x| < R$ için seri yakınsaktır. R 'ye serinin yakınsaklık yarıçapı denir. $|x| > R$ için seri ıraksaktır. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ serisi $|x - x_0| < R$ için yakınsak, $|x - x_0| > R$ için ıraksaktır.
- Örneğin $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$ serisi $-2 < x < 0$ aralığında yakınsaktır.
- Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı 2, yakınsaklık aralığı $-3 < x < 1$ olur.
- Örneğin $(x-3)y' + 2y = 0$ denkleminin çözümü $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3} x^n$ şeklindedir. Çözümün yakınsaklık yarıçapı 3'tür.
- Örneğin $x^2 y' = y - x - 1$ denkleminin çözümü $y(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)! x^n$ şeklindedir. Çözümün yakınsaklık aralığı 0'dır. O halde diferansiyel denklemin bir kuvvet serisi çözümü yoktur.
- Örneğin $y'' + y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ civarında kuvvet serisi çözümü $y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ şeklindedir.

18. Bazı Sayısal Yöntemler

- **Euler Yöntemi.** Euler yöntemi başlangıç değer problemleri için en basit yaklaşım tekniğidir. Bu yöntemle iyi tanımlanmış $\frac{dy}{dt} = f(t, y), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha$ başlangıç değer problemine yaklaşımlar elde etmek amaçlanmaktadır. Euler yöntemi Taylor serisinin ilk iki terimini kullanır ve birinci mertebeden türevleri kapsar. Kalan terim silinerek her bir $i = 1, 2, \dots, N$ için $y(t_i) = y_i$ yaklaşımları oluşturulur:

$$y_0 = \alpha, y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

- **Örnek:** $y' = y - t^2 + 1, 0 \leq t \leq 2, y(0) = 0.5$ başlangıç değer probleminin $t = 2$ noktasındaki çözümünü elde etmek için Euler yöntemini kullanın.
- **Çözüm:** $y_0 = 0.5; y_1 = 1.25; y_2 = 2.25; y_3 = 3.375; y_4 = 4.4375$.
- **Örnek:** $y' = y - t^2 + 1, 0 \leq t \leq 2, y(0) = 0.5$ başlangıç değer probleminin $y(2)$ çözümünü Euler yönteminde $N = 10$ alarak belirleyin ve düğüm noktalarındaki değerleri $y(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t$ kesin çözümünün değerleri ile karşılaştırın.
- **Çözüm:** $y_0 = 0.5; y_1 = 0.8, y_2 = 1.152, y_3 = 1.5504, y_4 = 1.98848, y_5 = 2.458176, y_6 = 2.9498112, y_7 = 3.4517734, y_8 = 3.9501281, y_9 = 4.4281538, y_{10} = 4.8647845$.
- **Örnek:** $y' = -y + t + 1, 0 \leq t \leq 1, y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin $y(1)$ yaklaşık değerini $N = 10$ alarak Euler yöntemi ile belirleyin.
- **Çözüm:** $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 1.01, y_3 = 1.029, y_4 = 1.0561, \dots, y_9 = 1.28742, y_{10} = 1.348678$.
- **Örnek:** $y' = \frac{2t+y}{2y-t}, y(1) = 0$ başlangıç değer problemi için $y(1.2)$ ve $y(1.4)$ değerlerini Euler yöntemi ile bulunuz.
- **Çözüm:** $y_0 = 0, y_1 = -0.4, y_2 = -0.6$.
- **Runge-Kutta Yöntemi (Dördüncü Mertebe Runge-Kutta Yöntemi):** $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ şeklindedir. Burada $k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right), k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right), k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3h)$ olur.
- **Örnek:** $y' = y - t, y(0) = 2$ başlangıç değer probleminde $y(0.1)$ değeri 2.2050 olarak bulunur.
- **Örnek:** $y' = 3e^{-t} - 0.4y, y(0) = 5$ başlangıç değer probleminde $y(3.0)$ değeri 2.759 olarak bulunur.
- **Örnek:** $y' = -2y + t + 4, y(0) = 1$ başlangıç değer probleminde $y(0.2)$ değeri 1.3472 olarak bulunur.
- **Örnek:** $y' = 37.5 - 3.5y, y(0) = 50$ başlangıç değer probleminde $y(3.0)$ değeri 11455 olarak bulunur.

Kaynaklar

1. İ. Ünver, C. Yazıcı, Çözümlü Diferansiyel Denklemler (Ed. A. Baki), Pegem Akademi, 5. Baskı, 2020.
2. B. Ayanlar, Diferansiyel Denklemler, Nobel Yayıncılık, 2022.
3. M. Başarır, E. S. Türker, Çözümlü Problemlerle Diferansiye Denklemler, Değişim Yayınları, 2009.
4. N. Dernek, A. Dernek, Diferansiyel Denklemler, Birsen Yayınevi, 2011.
5. Y. Pala, Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler, Nobel, 2022.
6. U. Arifoğlu, Diferansiyel Denklemler ve MATLAB Çözümleri, Alfa Yayınları, 2021.
7. R. Amirov, N. Topsakal, M. Ünlü, Diferansiyel Denklemler Teorisi ve Çözümlü Örnekler, Nobel, 2023.
8. H. Bereketoğlu, Diferansiyel Denklemler, Nobel, 2021.
9. S. Fakıoğlu, D. Malkoç, Differential Equations Problems and Solutions, Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi Yayınları, 2014.
10. S. Fakıoğlu, Differential Equations, Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi Yayınları, 2014.
11. M. Aydın, B. Kuryel, G. Gündüz, G. Oturanç, Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, 12. Baskı, Barış Yayınları Fakülteler Kitabevi, 2013
12. Burden, R. L., Faires, J. D., Burden, A. M., Numerical Analysis, Cengage learning, 2015.
13. M. Bayram, Diferansiyel Denklemler, Birsen, 2010.
14. Francis Scheid, Nümerik Analiz - Schaum Serisi, Çeviri Editörü: Hilmi Hacısalihoğlu, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2000.
15. R. Bronson, G. B. Costa, Diferansiyel Denklemler – Schaum Serisi, Çeviri Editörü: Hilmi Hacısalihoğlu, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2019.
16. C. H. Edwards, D. E. Penney, Differential Equations and Boundary Value Problems, Pearson, 2004.
17. M. Kandemir, Diferansiyel Denklemler, Pegem, 2021.
18. M. Çağlıyan, N. Çelik, S. Doğan, Adi Diferansiyel Denklemler, Dora, 2022.
19. R. K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Sinder, Diferansiyel Denklemlerin Temelleri (Çeviri Ed.: O. Doğru), Nobel, 2013.
20. E. Pişkin, Teori ve Çözümlerle Diferansiyel Denklemler, Seçkin, 2022.