

FİZİK BÖLÜMÜ

DERSİN ADI: KUANTUM FİZİĞİ I

ÖDEV SET NO: VI

S.1- A, B ve C operatörleri için

a) $[A, B] = -[B, A]$

b) $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$

c) $[AB, C], [A, BC]$ komütasyonlarını $[A, C]$ ve $[B, C]$ komütasyonu cinsinden ifadesini bulunuz.

S.2- $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ ve A, x e göre türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki ifadeleri ıspatlayınız.

$$[p, x] = -i\hbar, \quad [p, x^n] = -ni\hbar x^{n-1}, \quad n > 1$$

$$[p, A] = -i\hbar \frac{dA}{dx}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{P}_x \right] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x};$$

S.3- A, B ve C üç gözlenebilirin $[A, B] = iC$ komütasyon ilişkisini sağladığını varsayalım, Bu durumda aşağıdaki belirsizlik ifadesinde sağlandığını gösteriniz.

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|<C>|}{2}$$

Burada $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$ ve $\langle C \rangle$, C gözlenebilirinin beklenen değeridir.

S.4- H sistemin Hamiltonyeni olmak üzere herhangi bir Q gözlenebilirinin beklenen değerinin aşağıdaki ifadeyi sağladığını gösteriniz.

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle,$$

S.5. Operatör $\hat{Q} \equiv i \frac{d}{d\phi}$ şeklinde tanımlanıyor. ϕ polar koordinatlarda azmut açıdır.

$\hat{Q}$ hermityenmidir. Özdeğer ve öz-vektörlerini bulunuz. Özdeğer spektrumunu bulunuz.

S.6- İki seviyeli bir sistemin Hamiltonyeni $H = E(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$, şeklindedir. $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ ortonormal bazlardır. Özdeğer ve öz vektörleri bulunuz.

S7) A ve B iki operator ve $[B, [A, B]] = [A, [A, B]] = 0$ olmak üzere

a) $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$ b) $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$ olduğunu gösteriniz.

8) A ve B iki matris $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 3 \end{pmatrix}$ şeklinde veriliyor.

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

- a) $A + B = ?$
- b) $AB = ?$
- c) $[A, B]$ komütasyonunu hesaplayınız
- d) $A^T = ?$ (Transpozu)
- e) $A^* = ?$ (kompleks eşleniği)
- f) $A^\dagger = ?$ (Hermitik eşleniği)
- g) $\text{Tr}(B) = ?$ (izi (trace))
- h) $\det(B) = ?$ (determinantı) ve $B^{-1} = ?$ (B nin tersi)

9) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & i \\ 2 & 0 & 3 \\ 2i & -2i & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 3 & 3 \end{pmatrix}$ kare matrisleri ve $a = \begin{pmatrix} i \\ 2i \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} i2 \\ (1-i) \\ 0 \end{pmatrix}$ kolon matrislerini kullanarak aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

- a) $Aa = ?$
- b) $a^\dagger b = ?$
- c) $a^T B b$
- d) $ab^\dagger = ?$

10) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matrisinin özdeğer ve öz vektörünü bulunuz.

11) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2i & i & 2i \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve öz vektörlerini hesaplayınız.

12) Harmonik osilatör potansiyeli için konum (X), momentum (P) ve Hamiltonyen (H) operatörlerinin matris temsillerini elde ediniz.

13) Aşağıdaki komütasyon özdeşliğini ispatlayınız

a) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

b) $[x^n, p] = i\hbar x^{n-1}$

c) $[f(x), p] = i\hbar \frac{df}{dx}$

14) $\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle + \langle \frac{\partial Q}{\partial t} \rangle$

İfadesine

- a) $Q=1$
- b) $Q=H$
- c) $Q=p$ özel durumları uygulayınız

15) Üç boyutlu vektör uzayının $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ ortonormal bazları ile gerildiğini düşünelim. $|\alpha\rangle$ ve $|\beta\rangle$ ketleri

$$|\alpha\rangle = i|1\rangle - 2|2\rangle - i|3\rangle,$$

$$|\beta\rangle = i|1\rangle - 2|3\rangle,$$

Şeklinde veriliyor.

- a) $\langle\alpha|$ ve $\langle\beta|$ y1 oluřturunuz ($|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ ortonormal bazları cinsinden)
- b) $\langle\alpha|\beta\rangle$ ve $\langle\beta|\alpha\rangle$ y1 bulunuz ve $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ olduğunu doğrulayınız.
- c) $A = |\alpha\rangle\langle\beta|$ A operatörünün 9 matris elemanını bularak A nın matris temsilini bulunuz.

16) $\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H, Q]\rangle + \langle\frac{\partial Q}{\partial t}\rangle$ ifadesini kullanarak $\frac{d}{dt}\langle xp\rangle = 2\langle T\rangle - \langle x\frac{dV}{dx}\rangle$ olduğunu ispatlayınız. Burada T kinetik enerji ($H=T+V$). Kararlı durumda eşitliğin sol tarafı sıfırdır. Böylece

$2\langle T\rangle = \langle x\frac{dV}{dx}\rangle$ Elde edilir. Bu ifade virial teoremi olarak adlandırılır. Harmonik osilatör için $\langle T\rangle = \langle V\rangle$ olduğunu gösteriniz.